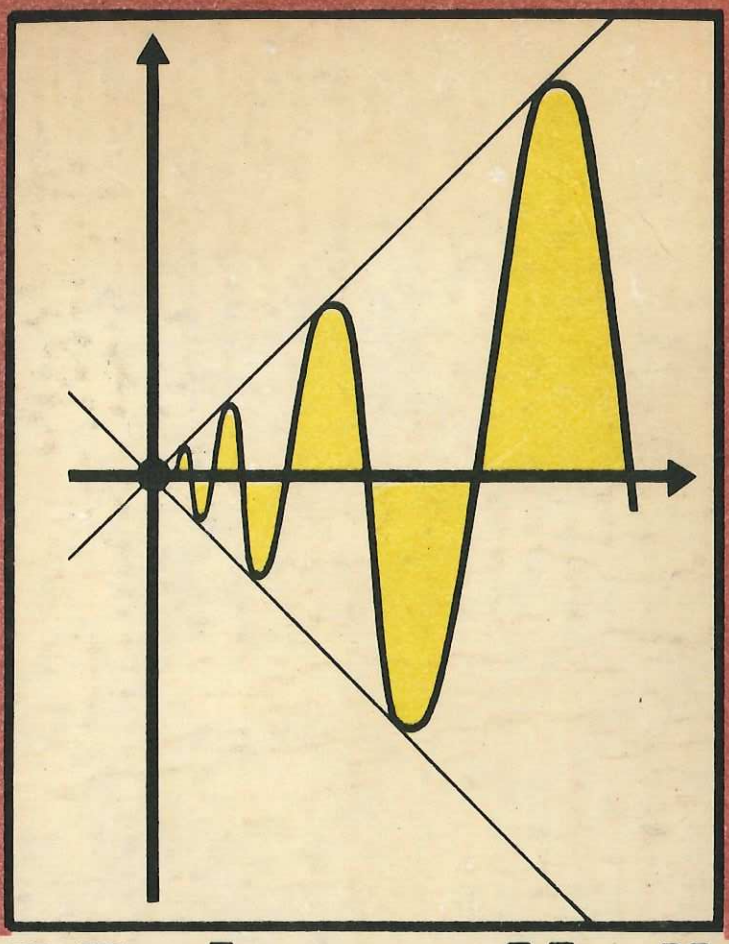
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI



XI

Matematică

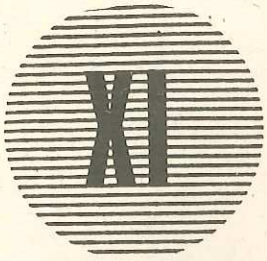
Elemente de analiză matematică

Manual pentru clasa a XI-a

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI, — 1989

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Cercet. dr. GH. GUSSI Prof. univ. dr. O. STĂNĂȘILĂ Prof. T. STOICA



Matematică

Elemente de analiză matematică

Manual pentru clasa a XI-a

Editura Didactică și Pedagogică
București — 1989

Manualul a fost elaborat în anul 1980, pe baza programei şcolare
aprobate de Ministerul Educaţiei şi Învăţământului
cu nr. 39490/1978, şi revizuit în anul 1982

Referenţi: *Prof. univ. dr.* N. BOBOC
Cercetător GR. ARSENE
Prof. I. MAFTEI
Prof. D. OGREZEANU
Prof. M. CHIRIŢĂ
Prof. M. RĂDULESCU
Prof. S. RĂDULESCU

ISBN 973 — 30 — 0064 — 7

Redactor: Prof. CĂTĂLIN-PETRU NICOLESCU
Tehnoredactor: ION MIREA
Coperta: NICOLAE SÎRBU

Capitolul I
NUMERE REALE. FUNCȚII REALE

Introducere

Cea mai mare parte a acestui capitol se referă la noțiuni pe care le-ați întîlnit în studiul algebrei sau geometriei. Înainte de orice, enunțăm cîteva probleme a căror rezolvare se poate da prin (sau numai prin) metode de analiză matematică.

a) În calcule aproximative se pune adeseori problema de a afla valoarea unei funcții f într-un punct a, procedîndu-se astfel: se alege o aproximare b a lui a, $b \simeq a$ și se calculează $f(b)$ [de exemplu, pentru $f(x) = \frac{1}{3}(x+1)$ și $a = \pi$, se alege $b = 3{,}14$ și $f(\pi) \simeq \frac{1}{3}(3{,}14 + 1) = 1{,}38$]. Mai întîi este necesar un anumit control al erorilor făcute în astfel de aproximări, mai ales în cazul unor calcule lungi în care apar fenomene de „propagare" a erorilor; apoi, ce ne asigură că dacă $b \simeq a$, atunci $f(b) \simeq f(a)$?

Răspunsul la astfel de întrebări poate fi dat cu metode de analiză matematică.

b) Presupunem că trebuie construită o cisternă de forma indicată în figura I.1 (redusă la un cilindru circular drept cu două emisfere) avînd o arie totală prescrisă A. Soluția nu este unică și poate fi de folos să construim o astfel de cisternă, astfel încît volumul ei să fie cel mai mare posibil. Pentru a formula matematic această problemă, notăm cu x raza bazei cilindrului (egală cu raza fiecărei emisfere) și cu h înălțimea cilindrului. Atunci $A = 2\pi xh + 4\pi x^2$, de unde $h = \frac{A - 4\pi x^2}{2\pi x}$. Volumul cisternei va fi:

$$V(x) = \pi x^2 h + \frac{4\pi x^3}{3} = \pi x^2 \cdot \frac{A - 4\pi x^2}{2\pi x} + \frac{4\pi x^3}{3} = \frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3).$$

Problema pusă revine atunci la determinarea valorii maxime a lui V cînd x ia diverse valori strict pozitive. Se poate da o soluție directă, luînd $x_0 = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}$, deci $V(x_0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$ și arătînd că $V(x) \leqslant V(x_0)$ pentru orice $x > 0$; într-adevăr, aceasta revine la $\frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3) \leqslant$

$$\leqslant \frac{1}{6} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{6}\left(4\pi x^3 - 3Ax + \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}\right) \geqslant 0,$$

$$\frac{2}{3}(\pi x + \sqrt{\pi A})\left(x - \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \geqslant 0, \text{ ceea ce este}$$

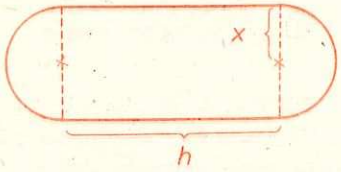


Fig. I.1

clar. Aşadar, $V(x) \leqslant V(x_0)$, pentru orice $x > 0$ şi volumul maxim este obţinut pentru $x = x_0$. Dar, în situaţii mai complicate o astfel de abordare directă nu este posibilă. În capitolul V, pag. 200, vom da o metodă practică, utilizînd Analiza Matematică, pentru rezolvarea problemelor de extrem, aplicabilă în situaţii mai generale.

c) Considerăm o funcţie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ şi fixăm $x_0 \in (a, b)$. Fie $M_0(x_0, f(x_0))$ punctul corespunzător pe graficul lui f, raportat la un sistem ortogonal xOy de axe (figura I.2).

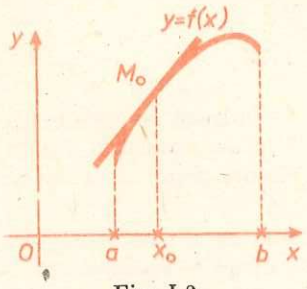


Fig. I.2

Se pune problema ca dintre toate dreptele trecînd prin punctul M_0 să găsim, dacă este posibil, tangenta în M_0 la grafic, adică dreapta care „aproximează cel mai bine graficul lui f în jurul lui x_0". Ecuaţia oricărei drepte trecînd prin M_0 este $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ şi problema revine la a găsi numărul real m astfel încît să aibă loc aproximarea $f(x) \simeq f(x_0) + m(x - x_0)$ în jurul punctului x_0, într-un sens care va fi precizat.

În cazul cînd funcţia f descrie un proces fizic, problema anterioară corespunde „liniarizării" acelui proces în jurul poziţiei x_0, fapt utilizat în mod curent în aplicaţii. Răspunsul matematic la această problemă va fi dat în capitolul IV.

d) În algebră şi în trigonometrie au fost considerate unele funcţii cu valori reale de variabilă reală, foarte importante pentru aplicaţiile matematicii — funcţiile polinomiale, raţionale, exponenţiale, logaritmice, trigonometrice etc. În analiză va fi adîncit studiul acestora.

Pînă acum ştiţi să reprezentaţi graficul unor funcţii reale simple. Analiza matematică va da metode generale de determinare a unor puncte (puncte de maxim, de minim, inflexiuni etc.) şi a unor drepte (de exemplu, asimptote) ataşate în mod corespunzător funcţiilor reale dintr-o clasă largă de funcţii, permiţînd studiul acestor funcţii şi trasarea graficului lor. Desenul constituie un excelent mijloc vizual de concentrare de informaţie, iar în cazul graficelor de funcţii descriind procese fizice, desenul permite să se obţină dintr-o privire o idee (şi chiar mai mult) asupra evoluţiei acelor procese.

e) Noţiuni importante ca: viteza şi acceleraţia unui mobil la un moment dat, intensitatea unui curent electric la un moment dat, tangenta la o curbă într-un punct, lungimea unui arc de curbă, aria unei figuri plane, volumul unui corp în spaţiu, centrul de greutate, momentul de inerţie etc. nu pot fi definite şi utilizate în mod corespunzător decît înţelegînd noţiunea de *limită*.

§ 1. Numere reale

Dacă privim cu atenţie, în toate aceste probleme, obiectele matematice utilizate au fost numerele (şi funcţiile). În clasele primare aţi învăţat calculele cu numere naturale, descriind în fond operaţii cu mulţimi finite, iar în gimnaziu aţi învăţat să rezolvaţi ecuaţii de tipul $a + x = b$ cu a, b naturale date şi

$qx = p$, cu p, q numere întregi date, $q \neq 0$. Cu alte cuvinte, au fost considerate următoarele mulțimi de numere (naturale, întregi și respectiv raționale):

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\},\ \mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\},\ \mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}.$$

Dar multe probleme de tipul celor considerate mai sus nu pot fi rezolvate în cadrul mulțimii $\mathbb{Q}$ și sînt necesare numerele iraționale. Aceasta a impus, atît din rațiuni practice cît și prin resorturile interne ale dezvoltării matematicii, lărgirea conceptului de număr ca măsură a mărimilor din realitatea fizică dar și ca obiect matematic de studiu. Elaborarea noțiunii matematice de număr real a constituit un proces lung, sinuos, încheiat abia în secolul trecut prin lucrările matematicienilor K. Weierstrass (1815—1897), R. Dedekind (1831—1916), G. Cantor (1845—1918). Fundamentarea analizei matematice pe baze teoretice solide este necesară pentru că există o multitudine de probleme care nu pot fi rezolvate prin metode intuitive și numai conceptele matematice definite riguros conferă valabilitate rezultatelor și permit studiul unor situații mai complicate. În acest manual vom adînci conceptele de număr real și funcție reală de o variabilă reală, care stau la baza rezultatelor analizei matematice.

Reamintim că mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este o mulțime care include mulțimea $\mathbb{Q}$ $\left(\text{deci } 3, -2, \frac{2}{3}, \frac{1}{10^4}, -\frac{8}{7} \text{ sînt numere reale}\right)$. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ sînt definite o operație de adunare, o operație de înmulțire și o relație de ordine. Se mai spune că sînt definite o structură algebrică și o structură de ordine. Precizăm acești termeni. În general, dacă $f : A \to B$ este o funcție oarecare, atunci oricărui element $u \in A$ i se asociază $f(u) \in B$ și vom scrie uneori $u \mapsto f(u)$. Dacă M este o mulțime, prin *operație algebrică (binară)* pe M cu eticheta $*$ înțelegem o funcție $M \times M \to M$, $(x, y) \mapsto x * y$; prin *relație (binară) pe M* înțelegem o submulțime R a produsului cartezian $M \times M$; pentru $x, y \in M$ scriem xRy în loc de $(x, y) \in R$ și citim: x este în relația R cu y. Relația R se numește *relație de ordine* dacă este reflexivă (xRx pentru orice $x \in M$), tranzitivă ($x, y, z \in M$; xRy, $yRz \Rightarrow xRz$) și antisimetrică ($x, y \in M$; xRy, $yRx \Rightarrow x = y$).

Exemple

1) Pe mulțimea $M = \mathbb{Z}$ a numerelor întregi sînt definite operațiile algebrice de adunare (cu eticheta $+$) și înmulțire (cu eticheta $\cdot$), precum și relația de ordine „mai mic sau egal", notată cu $\leqslant$.

2) În mod similar, pe mulțimea $M = \mathbb{Q}$ sînt definite operațiile algebrice de adunare $+$, înmulțire $\cdot$ și relația de ordine $\leqslant$, cu proprietățile uzuale care vă sînt binecunoscute.

Așa cum am mai spus, pe mulțimea $\mathbb{R}$ sînt date două operații algebrice care extind operațiile din $\mathbb{Q}$. Oricărui cuplu (x, y) de numere reale i se asociază suma $x + y$ și produsul xy și se definesc astfel operațiile de adunare $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x + y$ și înmulțire $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to xy$.

1.1 Proprietăţile algebrice ale lui $\mathbf{R}$ (axiomele adunării şi înmulţirii)

1°. *Adunarea este asociativă şi comutativă.*

2°. *Există numărul real* 0 (zero) *astfel încît* $x + 0 = x$, *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$.

3°. *Pentru orice* $x \in \mathbf{R}$ *există numărul* $-x \in \mathbf{R}$ *astfel încît* $x + (-x) = 0$.

Numărul 0 este unic avînd proprietatea 2°: într-adevăr, dacă $0' \in \mathbf{R}$ şi $x + 0' = x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, atunci pentru $x = 0$, rezultă $0 + 0' = 0$ şi, pe de altă parte, din 2°, pentru $x = 0'$ rezultă $0' + 0 = 0'$. Aşadar $0 = 0'$. În mod similar, se arată că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ fixat există un unic element y astfel încît $x + y = 0$, anume $y = -x$; în plus, $-(-x) = x$. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$, atunci se notează $x - y = x + (-y)$ (*diferenţa* numerelor x, y). Ecuaţia $a + x = b$ (a, $b \in \mathbf{R}$ fiind date) are o soluţie şi aceasta este unică, anume $x = b - a$.

4°. *Înmulţirea este asociativă şi comutativă.*

5°. *Există numărul real* 1 ($1 \neq 0$) *astfel încît* $x \cdot 1 = x$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$.

6°. *Pentru orice* $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$ *există numărul* x^{-1} $\left(\text{notat şi } \frac{1}{x}\right)$ *din* $\mathbf{R}$, *astfel încît* $x \cdot x^{-1} = 1$.

7°. *Înmulţirea este distributivă în raport cu adunarea, adică* $x(y + z) = xy + xz$, *pentru orice* $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Din aceste proprietăţi rezultă că 1 este unic, avînd proprietatea 5° şi, de asemenea, pentru $x \neq 0$ dat inversul x^{-1} este unic. Apoi $x \cdot 0 = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ [într-adevăr, $x \cdot 0 = x(0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, conform 7°; notînd $x \cdot 0 = u$, rezultă aşadar $u = u + u$, deci $u = 0$]. Remarcăm că dacă $xy = 0$, atunci $x = 0$ sau $y = 0$ [într-adevăr, dacă $xy = 0$ şi $x \neq 0$, atunci există x^{-1} şi înmulţind cu x^{-1} relaţia anterioară obţinem $x^{-1}(xy) = 0$, adică $(x^{-1}x)y = 0$, $1 \cdot y = 0$, deci $y = 0$].

Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ şi $y \neq 0$, se notează $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ (*cîtul* numerelor x şi y). Reţinem că împărţirea cu zero nu este definită. Este evident că, pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, ecuaţia $ax = b$ are soluţie unică, anume $x = \frac{b}{a}$.

Proprietăţile 1° — 7° se pot exprima pe scurt spunînd că *mulţimea* $\mathbf{R}$ *are o structură de corp comutativ* (relativ la operaţiile de adunare şi înmulţire).

1.2. Proprietăţile de ordine ale lui $\mathbf{R}$ (axiomele de ordine)

8°. *Pe mulţimea* $\mathbf{R}$ *este fixată o relaţie de ordine notată* $\leqslant$. Aşadar, dacă $x, y, z \in \mathbf{R}$ şi $x \leqslant y$, $y \leqslant z$, atunci $x \leqslant z$, iar dacă $x \leqslant y$, $y \leqslant x$, atunci $x = y$; se mai scrie $y \geqslant x$ în loc de $x \leqslant y$. Pentru $x, y \in \mathbf{R}$ se scrie $x < y$ (echivalent $y > x$) şi se citeşte x este *strict mai mic* decît y dacă $x \leqslant y$ şi $x \neq y$.

9°. *Pentru orice* $x, y \in \mathbf{R}$ *avem* $x \leqslant y$ *sau* $y \leqslant x$ (se mai spune că *relaţia de ordine pe* $\mathbf{R}$ *este totală*).

Dăm acum proprietățile de compatibilitate între structura algebrică și structura de ordine pe mulțimea $\mathbf{R}$.

10°. *Dacă* $x, y \in \mathbf{R}$ *și* $x \leqslant y$, *atunci* $x + z \leqslant y + z$ *pentru orice* $z \in \mathbf{R}$.

11°. *Dacă* $x, y \in \mathbf{R}$ *și* $x \leqslant y$, *atunci* $xz \leqslant yz$ *pentru orice* $z \in \mathbf{R}$, $z \geqslant 0$.

Din proprietățile algebrice (1° — 7°) și de ordine (8° — 11°) se deduc, așa cum știți de fapt din manualele de algebră ale claselor anterioare, toate regulile calculului algebric și ale calculului cu inegalități. În analiza matematică este utilizat sistematic calculul cu inegalități și este esențială mînuirea lui corectă. Proprietățile anterioare sînt satisfăcute nu numai de elementele mulțimii $\mathbf{R}$; de exemplu, elementele lui $\mathbf{Q}$ au aceleași proprietăți. Se mai spune că $\mathbf{R}$ și $\mathbf{Q}$ sînt corpuri comutative *total ordonate*. Ceea ce deosebește mulțimea $\mathbf{R}$ de mulțimea $\mathbf{Q}$ este axioma lui Cantor a marginii superioare, care stă la baza obținerii tuturor rezultatelor profunde ale analizei matematice și pe care o enunțăm mai jos. Sînt necesare unele pregătiri și începem cu un exemplu. Să considerăm mulțimile următoare:

$$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 \leqslant 3\} \text{ și } B = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 3\}.$$

Ambele mulțimi sînt majorate de numărul 2, în sensul că pentru orice $x \in A$ avem $x \leqslant 2$ și pentru orice $x \in B$ avem $x \leqslant 2$. Se observă că ele sînt majorate și de numerele 1,8; 1,74; 1,733 etc. (orice element din A sau din B este mai mic decît fiecare din aceste numere). Luînd așadar aproximațiile succesive prin adaos ale lui $\sqrt{3}$, se găsesc majoranți „din ce în ce mai mici" ai mulțimilor A, B. Remarcăm că $A \subset \mathbf{Q}$, $B \subset \mathbf{R}$. Deoarece $\sqrt{3}$ este irațional (adică $\sqrt{3} \notin \mathbf{Q}$), rezultă că $\sqrt{3} \notin A$; dar $\sqrt{3} \in B$.

O submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ se numește *majorată* (sau *mărginită superior*) dacă există cel puțin un număr real k astfel încît pentru orice $x \in C$ să avem $x \leqslant k$. Un astfel de număr k se numește un *majorant* al lui C.

Putem acum formula proprietatea următoare, a cărei înțelegere cere oarecare efort:

12°. *Orice submulțime nevidă majorată* $C \subset \mathbf{R}$ *admite un cel mai mic majorant (axioma lui Cantor).* Acest element este un număr real unic, numit *marginea superioară a lui* C și este notat $\sup C$.

În exemplul anterior mulțimile A, B, ca submulțimi ale lui $\mathbf{R}$, sînt majorate și se poate arăta că $\sup A = \sqrt{3}$, $\sup B = \sqrt{3}$. Se observă că $\sup A \notin A$ și $\sup B \in B$. De asemenea, se observă că, în general, submulțimile lui $\mathbf{Q}$ nu au proprietatea 12° (într-adevăr, $A \subset \mathbf{Q}$ este majorată în $\mathbf{Q}$, dar nu admite un cel mai mic majorant număr rațional).

La punctul 4.1 vom reveni asupra acestor noțiuni și le vom fixa mai bine.

Cu aceasta definiția axiomatică a mulțimii $\mathbf{R}$ este încheiată. Pe scurt, ea se rezumă astfel: $\mathbf{R}$ satisface proprietățile 1° — 12° sau echivalent, *este un corp comutativ total ordonat, în care orice submulțime nevidă majorată are margine superioară, aparținînd lui* $\mathbf{R}$.

Se pun în mod natural două întrebări:

a) Există o mulțime $\mathbf{R}$ avînd proprietățile 1° — 12°?

b) Pot exista mai multe mulțimi satisfăcînd proprietățile 1° — 12°?

La prima întrebare se poate răspunde construind prin operații de teoria mulțimilor pornind de la $\mathbf{Q}$ o mulțime avînd proprietățile 1° — 12°. În acest sens se cunosc construcția

zecimală a lui Weierstrass, construcția lui Dedekind (folosind „tăieturile" în mulțimea $\mathbf{Q}$) și construcția lui Cantor (folosind șirurile de numere raționale), fiecare din aceste construcții fiind laborioasă.

La cea de-a doua întrebare răspunsul este mai delicat. Anume, se poate arăta că dacă S este un alt corp comutativ total ordonat satisfăcînd axioma lui Cantor, atunci există o aplicație bijectivă $f : S \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ pentru orice $x, y \in S$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ și, în plus, dacă $x \leqslant y$, atunci $f(x) \leqslant f(y)$. Orice calcul efectuat cu elemente $x, y, z, \ldots$ din S poate fi transformat într-un calcul cu numerele reale $f(x), f(y), f(z), \ldots$ și orice element $x \in S$ se poate identifica prin numărul real $f(x)$. Se mai spune că proprietățile 1° — 12° caracterizează mulțimea $\mathbf{R}$ „pînă la izomorfism".

Ca o consecință a proprietăților 1° — 12° se poate stabili următorul rezultat important, numit *proprietatea* (sau, într-un alt context, *axioma*) *lui Arhimede* (287—212 î.e.n.):

Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există un număr întreg n unic astfel încît $n \leqslant x < n+1$. Acest număr este numit partea întreagă a lui x și este notat $[x]$.

Exemple: $[2, 67] = 2$, $[3] = 3$, $[\pi] = 3$, $[-\pi] = -4$, $[-0{,}6347] = -1$. Deși mulțimea $\mathbf{Q}$ nu satisface proprietatea lui Cantor, totuși în $\mathbf{Q}$ are loc proprietatea lui Arhimede.

1.3. Reprezentarea geometrică a lui R

Convenim să spunem că o mulțime P *admite o reprezentare* pe o mulțime Q dacă există o aplicație bijectivă de la P la Q, adică o corespondență bijectivă între elementele mulțimilor P și Q.

Considerînd o axă avînd originea A_0 și vectorul unitate $\vec{u} = \overrightarrow{A_0A_1}$ (figura I.3) și notînd cu Δ mulțimea punctelor axei, se definește, așa cum de altfel s-a făcut în clasele anterioare, aplicația $\alpha : \mathbf{R} \to \Delta$ care asociază oricărui

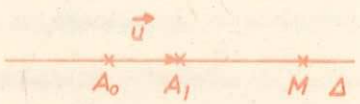


Fig. I.3

număr real x acel unic punct $M \in \Delta$ astfel încît $\overrightarrow{A_0M} = x\vec{u}$. Așadar, $\alpha(x) = M$ și, în particular, $\alpha(0) = A_0$, $\alpha(1) = A_1$. Aplicația α este bijectivă și se numește *reprezentarea geometrică a lui* $\mathbf{R}$ *pe* Δ (depinzînd de $\vec{u}$); inversa ei $\alpha^{-1} : \Delta \to \mathbf{R}$ asociază oricărui punct al lui Δ abscisa acestui punct. Dacă $a, x, b \in \mathbf{R}$, faptul că $a < x < b$ înseamnă că punctul $\alpha(x)$ este situat între punctele $\alpha(a)$ și $\alpha(b)$. Aplicația α a fost stabilită pentru prima dată de R. Descartes (1596—1650) și-a constituit punctul de plecare în elaborarea geometriei analitice și în interpretarea geometrică a unor rezultate ale analizei matematice. Existența aplicației α, care permite o identificare a punctelor de pe Δ cu elementele lui $\mathbf{R}$, justifică faptul că mulțimea $\mathbf{R}$ este uneori numită *dreaptă reală*, iar numerele reale se mai numesc *puncte*.

Considerînd un plan P și un sistem ortogonal de axe în acel plan, se poate stabili (așa cum știți) o aplicație bijectivă de la P la $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, asociind oricărui punct din planul P perechea ordonată a coordonatelor lui. Astfel de reprezentări geometrice au fost considerate în clasele anterioare; ele au avantaje considerabile în privința comunicării rezultatelor analizei matematice și vor fi utilizate sistematic în continuare.

La prima vedere, dreapta reală are o descriere foarte simplă, dar la o cercetare mai atentă se remarcă coexistența pe $\mathbf{R}$ a cel puțin trei structuri — structura algebrică, structura de ordine, precum și structura de convergență, care va fi definită în capitolul următor.

Presupunem că $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Se pot considera intervalele *mărginite*

$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ (interval *deschis*);

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (interval *închis și mărginit*);

$[a, b) = \{x \in \mathbf{R}] \mid a \leqslant x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$ (intervale *semideschise*).

De asemenea, se definesc $(a, a) = [a, a) = (a, a] = \varnothing$ și $[a, a] = \{a\}$. Pentru un interval ca mai sus, numărul real $b - a$ se numește *lungimea* intervalului respectiv; dacă I este un interval mărginit, vom nota cu $l(I)$ lungimea acelui interval. Intervalele închise și mărginite se mai numesc intervale *compacte*. De exemplu, $[0, 1]$, $[-5, 3]$, $[-\pi, \pi]$ sînt intervale compacte.

Se utilizează de asemenea intervale *nemărginite* pe dreapta reală, de forma

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$, $[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$,

unde a este un număr real. În general, un *interval* este o submulțime $I \subset \mathbf{R}$, astfel încît $a, b \in I$, $a \leqslant c \leqslant b \Rightarrow c \in I$ (și se poate arăta că singurele intervale sînt cele indicate anterior).

Reamintim că o mulțime F se numește *finită* dacă $F = \varnothing$ sau există $n \geqslant 1$ întreg și o funcție bijectivă $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to F$; în acest caz, avem $F = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ unde $a_k = f(k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Mulțimile care nu sînt finite se numesc *infinite*; evident, intervalele de lungime >0 sînt mulțimi infinite. Reamintim, de asemenea, că dacă $M = \{M_i\}_{i \in I}$ este o colecție de mulțimi, se definesc *intersecția* $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid \forall i \in I,\ x \in M_i\}$ și reuniunea $\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid \exists\, i \in I,\ x \in M_i\}$.

Pentru orice $a, b \in \mathbf{R}$, notăm prin $\max(a, b)$ cel mai mare dintre numerele a, b. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, *modulul lui* x este

$$(1) \qquad |x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Evident, $x \leqslant |x|$ și $|-x| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Proprietățile modulului sînt cuprinse în teorema următoare.

TEOREMA I.1 *(proprietățile modulului).* M_1. **Pentru orice** $x \in \mathbf{R}$ **avem** $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M_2. **Dacă** $x, y \in \mathbf{R}$, **atunci** $|x+y| \leqslant |x| + |y|$;

M_3. **Pentru orice** $x, y \in \mathbf{R}$ **avem** $|xy| = |x| \cdot |y|$ **şi dacă** $y \neq 0$, **atunci** $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

La aceste proprietăţi se mai adaugă:

M_4. **Fie** $x \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$. **Avem** $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; $|x| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$; $|x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ şi $|x| \geqslant \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$.

M_5. **Pentru orice** $x, y \in \mathbf{R}$ **avem** $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.

Demonstraţie. Proprietăţile M_1, M_2, M_3 sînt bine cunoscute. Demonstrăm M_4. Dacă $|x| < \varepsilon$, atunci $\max(x, -x) < \varepsilon$, deci $x < \varepsilon$ şi $-x < \varepsilon$, adică $-\varepsilon < x < \varepsilon$ şi reciproc. Faptul că $|x| > \varepsilon$ revine la $\max(x, -x) > \varepsilon$, adică $-x > \varepsilon$ *sau* $x > \varepsilon$, deci $x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, \infty)$ etc. Pentru a demonstra M_5 este suficient de dovedit că $-|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y|$ (conform inegalităţii secunde din M_4). Prima inegalitate rezultă observînd că $|y| = |y - x + x| \leqslant |y-x| + |x| = |x-y| + |x|$, iar pentru inegalitatea secundă observăm că $|x| = |x - y + y| \leqslant |x-y| + |y|$, în ambele cazuri aplicînd M_2.

1.4. Reprezentarea zecimală a lui R

Ideea fundamentală a scrierii zecimale este aceea de a exprima orice număr real folosind un număr finit de semne, anume cifrele zecimale 0, 1, 2, ..., 9, la care se adaugă „–" (minus) şi „," (virgula). Acelaşi lucru se poate realiza prin scrierea binară.

Reamintim că numerele raţionale de forma $\frac{a}{10^n}$, cu $a \in \mathbf{Z}$ şi $n \geqslant 0$ natural, pot fi identificate cu fracţii zecimale finite.

Exemple: avem $2{,}471 = \frac{2\,471}{10^3}$; $\frac{1\,127}{10^4} = 0{,}1127$; $-4{,}38 = -\frac{438}{10^2}$.

Acestea sînt insuficiente atît în construcţii matematice, cît şi în descrierea matematică a măsurătorilor fizice (de exemplu, $\frac{1}{3}$, $\frac{12}{7}$ nu se exprimă prin fracţii zecimale finite). Este esenţială de aceea considerarea fracţiilor zecimale infinite.

Notăm cu $\mathcal{F}$ mulţimea *fracţiilor zecimale infinite*, adică a succesiunilor infinite de cifre zecimale de forma $m, x_1x_2x_3\ldots$, unde $m \in \mathbf{Z}$, iar $0 \leqslant x_k \leqslant 9$, x_k întregi (pentru orice $k \geqslant 1$). Facem convenţia de a elimina din mulţimea $\mathcal{F}$ fracţiile zecimale infinite în care toate cifrele sînt egale cu 9 de la un rang încolo. Cu această convenţie, două elemente $\alpha = m, x_1x_2x_3\ldots$ şi $\beta = n, y_1y_2y_3\ldots$ din $\mathcal{F}$ se consideră *egale* dacă $m = n$ şi $x_k = y_k$, pentru orice $k \geqslant 1$. Din clasele anterioare se ştie că *orice număr real se reprezintă printr-o fracţie zecimală infinită.*

Anume, oricărui număr real $x \in \mathbf{R}$ i se poate asocia în mod bine determinat o fracţie zecimală infinită notată $\beta(x) = m, x_1x_2x_3\ldots$; în acest mod s-a definit o aplicaţie

$$\beta : \mathbf{R} \to \mathcal{F},$$

numită *reprezentarea zecimală a lui* $\mathbf{R}$ (în analogie cu reprezentarea geometrică a lui $\mathbf{R}$, definită în 1.3). Aplicaţia β este bijectivă şi vom identifica orice număr real x cu fracţia zecimală infinită $\beta(x)$ scriind $x = m, x_1x_2x_3\ldots$; reamintim că x este iraţional dacă şi numai dacă reprezentarea sa zecimală nu este periodică.

TEOREMA I.2. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant 0$ și pentru orice întreg $n \geqslant 0$ avem

$$x^{(n)} \leqslant x < x^{(n)} + \frac{1}{10^n}, \tag{2}$$

unde $x^{(n)}$ este numărul obținut reținînd partea întreagă și primele n zecimale ale lui x. Un rezultat similar are loc pentru $x < 0$, anume $|x^{(n)} - x| < \frac{1}{10^n}$.

Demonstrație. Pentru orice x fixat, $x^{(n)}$ este aproximarea prin lipsă (trunchierea) de ordin n a numărului x; aproximarea prin adaos de ordin n a lui x este $x^{(n)} + \frac{1}{10^n}$. Dar orice număr real este cuprins între aproximările lui prin lipsă și prin adaos de orice ordin și se obține astfel relația (2).

Exemplu. Fie $x = \pi$; în acest caz, inegalitățile (2) pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$ sînt: $3 \leqslant \pi < 4$; $3{,}1 \leqslant \pi < 3$, 2; $3{,}14 \leqslant \pi < 3{,}15, \ldots$.

Unul din avantajele reprezentării zecimale a numerelor reale îl constituie posibilitatea de comparare a acestora și efectuarea unor calcule aproximative cu numere reale folosind trunchierile lor. De exemplu, nu este evident care din numerele $\sqrt{2}$ și $\frac{707}{500}$ este mai mare, dar considerînd reprezentările lor zecimale 1,4142... și 1,4140... respectiv, este evident că primul număr este mai mare.

Fie $a \in \mathbf{R}$ fixat. Dacă un număr real x este o aproximare a numărului a, atunci se scrie $x \simeq a$ sau $a \simeq x$. De exemplu: $\pi \simeq 3{,}1416$; $\frac{1}{3} \simeq 0{,}33$; $\sqrt{2} \simeq$ $\simeq 1{,}414$. În această formulare nu este însă precizat sensul termenilor utilizați și, în plus, în orice formulă aproximativă este necesară evaluarea erorii făcute. Formularea riguroasă este următoarea: dacă se dă numărul pozitiv ε, atunci se numește ε — *aproximare* (sau *aproximare de ordin cel mult* ε) a lui a orice număr real x astfel încît $|x - a| < \varepsilon$; numărul real și pozitiv $|x - a|$ se numește *eroarea absolută* în formula aproximativă $x \simeq a$.

Exemple

1) 3,1416 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^4}$ a lui π, deoarece $|\pi - 3{,}1416| < \frac{1}{10^4}$ și similar, 0,33 este o aproximare de ordin cel mult $\frac{1}{10^2}$ a lui $\frac{1}{3}$.

2) Fie $a = 2{,}9998$ și $b = 3{,}0001$. Eroarea absolută în formula aproximativă $b \simeq a$ este $|a - b| = 0{,}0003 = \frac{3}{10^4} < \frac{1}{10^3}$. În general, dacă numerele a și b au aceeași parte întreagă și aceleași prime n zecimale, atunci $a^{(n)} = b^{(n)}$, și $|a - b| = |a - a^{(n)} + b^{(n)} - b| \leqslant |a - a^{(n)}| + |b^{(n)} - b| < \frac{2}{10^n} < \frac{1}{10^{n-1}}$, adică b este o aproximare

de cel mult $\frac{1}{10^{n-1}}$ a lui a. Afirmația inversă nu este adevărată, așa cum arată numerele a și b considerate la început, unde a și b nu au zecimale comune, deși $|a-b|<\frac{1}{10^3}$.

3) Teorema I.2 se mai poate enunța astfel: pentru orice x real, are loc formula aproximativă $x \simeq x^{(n)}$, cu eroare absolută mai mică decît 10^{-n}, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

TEOREMA I. 3. Fie a, b numere reale fixate și $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Presupunem că x este o ε_1 — aproximare a lui a și y este o ε_2 — aproximare a lui b. Atunci

1°. suma $x+y$ este o $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ — aproximare a lui $a+b$;

2°. diferența $x-y$ este o $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ — aproximare a lui $a-b$;

3°. produsul xy este o ε — aproximare a lui ab, unde $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2 + |x|\,\varepsilon_2 + |y|\,\varepsilon_1$.

Demonstrație. Conform ipotezei, $|x-a|<\varepsilon_1$ și $|y-b|<\varepsilon_2$.

1°. Avem $|(x+y)-(a+b)| = |(x-a)+(y-b)| \leqslant |x-a| + |y-b| < \varepsilon_1+\varepsilon_2$.

2°. În mod similar, $|(x-y)-(a-b)| = |(x-a)+(b-y)| \leqslant |x-a|+|y-b|<\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

3°. Mai întîi, se observă că are loc identitatea

$xy-ab=(x-a)(b-y)+y(x-a)+x(y-b)$, de unde

$|xy-ab| \leqslant |x-a|\cdot|y-b| + |y|\cdot|x-a| + |x|\cdot|y-b| < \varepsilon_1\varepsilon_2 + |y|\,\varepsilon_1 + |x|\,\varepsilon_2$.

Exemplu. În formulele aproximative $\pi \simeq 3{,}1416$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}4142$, erorile absolute sînt mai mici decît $\varepsilon = 0{,}0001$. Atunci, în formulele aproximative $\pi+\sqrt{2} \simeq 4{,}5558$, $\pi-\sqrt{2} \simeq 1{,}7274$, eroarea absolută este mai mică decît 0,0002.

Rezultate de tipul celor din teorema I.3 sînt aplicate în mod curent în prelucrarea matematică a datelor experimentale. La introducerea datelor numerice pe calculator se utilizează fracții zecimale finite, în care numărul de zecimale considerate depinde de precizia urmărită ca și de mărimea memoriei calculatorului. În orice caz, trebuie făcută distincția netă dintre un număr real și trunchierile sale de diverse ordine. De exemplu, trebuie făcută distincția între numărul π și oricare din aproximările lui: 3,14; 3,1416 etc.

EXERCIȚII (capitolul I, § 1)

1. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ dat. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuațiile: $x^2=a^2$, $x^3=a^3$, $x^4=a^4$.

2. Folosind proprietatea lui Arhimede, să se arate că dacă $x, y \in \mathbf{R}$, $x>0$, atunci există n natural astfel încît $nx>y$.

3. Să se rezolve în mulțimea $\mathbf{R}$ ecuațiile:

a) $|x|+|x-1|=1$; b) $|x-1|+|x+1|=2$.

4. Dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și $|x-1| \leqslant 4$, $|y-2| \leqslant 5$, să se arate că $-6 \leqslant x+y \leqslant 12$.

5. Să se rezolve în $\mathbf{R}$ inecuațiile: a) $|x| + |x-1| > 0$; b) $|x| + |x-3| < 0$; c) $|x-1| \leqslant 1$; d) $|x| + |x-2| \leqslant 2x$; e) $|x+1| > 2$; f) $|x+1| > -1$; g) $|x-1| + |x^2 - 3x + 2| > 0$.

6. Să se exprime cu ajutorul modulului faptul că $x \neq y$ și faptul că $x - \frac{1}{10} < y < x + \frac{1}{10}$ (x, y fiind numere reale).

7. Fie $a_1, \ldots, a_n$ numere reale. Dacă $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sînt numere reale luînd doar valorile 0, 1 și -1, să se arate că $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$.

8. a) Presupunem că $0 < x < y$ în $\mathbf{R}$; să se arate că $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. Este adevărată reciproca?

b) Presupunem că $x_1 \leqslant y_1$, $x_2 \leqslant y_2$ și $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ în $\mathbf{R}$. Să se arate că $x_1 = y_1$ și $x_2 = y_2$. Generalizare.

9. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se notează $x_+ = \frac{x + |x|}{2}$ și $x_- = \frac{-x + |x|}{2}$. Să se arate că $x = x_+ - x_-$, $|x| = x_+ + x_-$. Să se reprezinte graficele funcțiilor $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = x_+$ și $g(x) = x_-$.

10. Fie b_1, b_2 numere reale fixate. Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = |x + b_1| + |x + b_2|$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, nu este injectivă.

11. Pentru orice numere reale $x > 0$, $y > 0$ se pot considera mediile: aritmetică $m_a = \frac{x+y}{2}$, geometrică $m_g = \sqrt{xy}$ și armonică $m_\alpha = \frac{2xy}{x+y}$. Să se arate că $m_\alpha \leqslant m_g \leqslant \frac{m_a + m_\alpha}{2} \leqslant m_a$.

12. Fie x, y, a, b numere reale oarecare. Să se arate că:

1°. $(xa + yb)^2 \leqslant (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$ (inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz); A.L. Cauchy, 1789—1857; V. Buniakowski, 1804—1889; H.A. Schwartz, 1843—1921.

2°. $\sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2} \leqslant \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2}$ (inegalitatea lui H. Minkowski, 1864—1909).

13. Să se determine toate valorile numărului natural n astfel încît:

a) $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$; d) $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10}$; g) $\frac{n^2}{n+1} < 10$;

b) $\frac{1}{n} > \frac{1}{20}$; e) $\frac{1}{5^n} > \frac{1}{125}$; h) $\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \frac{1}{100}$;

c) $\frac{1}{2^n} < 1$; f) $\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| > \frac{1}{10}$; i) $\left|\frac{2^n + 1}{2^n + 2} - 1\right| < \frac{1}{10}$.

În care cazuri mulțimile respective de valori sînt finite?

14. Să se determine $\bigcap_{n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 1} \left[0, \frac{1}{n}\right]$; $\bigcap_{n \in \mathbf{N},\, n \geqslant 1} \left(0, \frac{1}{n}\right)$; $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [-n, n]$; $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$.

15. Să se arate că în orice interval mărginit din $\mathbf{R}$ se află cel mult un număr finit de numere întregi.

16. Să se arate că intersecţia a două intervale deschise este mulţimea vidă sau un interval deschis. Dar intersecţia a două intervale compacte?

17. a) Să se indice o submulţime a lui $\mathbf{R}$ care nu poate fi reprezentată ca reuniune a două intervale.

b) Să se arate că mulţimea $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ este o reuniune de intervale deschise.

18. Fie $q \geqslant 1$ un număr întreg. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există p întreg astfel încît $\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q}$. Să se deducă inegalitatea $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}$.

19. Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$ se notează $d(x, y) = |x - y|$, distanţa euclidiană între x şi y. Să se arate că $\forall\, x, y, z \in \mathbf{R}$ avem $d(x, y) \geqslant 0$ şi $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$; $d(x, y) = d(y, x)$; $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$.

20. Să se figureze pe dreapta reală următoarele mulţimi de puncte: $A_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid d(x, 1) \leqslant 1\}$, notată pe scurt $\{d(x, 1) \leqslant 1\}$; $A_2 = \{d(x, 1) > 2\}$; $A_3 = \{1 \leqslant d(x, 2) \leqslant 5\}$; $A_4 = \{d(x, 0) > -1\}$; $A_5 = \{d(x, 0) \geqslant 4\}$; $A_6 = \{d(x, 0) \leqslant 4\}$.

21. Fie $I = [a, b]$ un interval închis, respectiv $J = (a, b)$, unde $a < b$. Să se arate că pentru orice $x, y \in I$ (respectiv $\in J$), avem $d(x, y) \leqslant l(I)$, (respectiv $d(x, y) < l(J)$).

22. Să se determine valorile numărului natural n astfel încît:

a) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 3\right) < \frac{1}{10}$; b) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 3\right) < \frac{1}{10^4}$; c) $d\left(\frac{3n+1}{n}, 1\right) < \frac{1}{10}$.

23. Pentru cîte valori ale numărului natural n au loc relaţiile:

a) $\frac{n+1}{n+2} > \frac{11}{10}$; b) $\frac{(2n)!}{(2n+1)!} > \frac{1}{10}$; c) $\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{10}$;

d) $\left| \frac{n^2+2n}{n^2+1} - 1 \right| > \frac{1}{20}$.

24. Să se arate că există N_1, N_2 naturale astfel încît:

a) $\frac{n}{n^2+n+1} < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N_1$; b) $2^n > n$ pentru orice $n \geqslant N_2$.

25. Să se arate că:

a) există $M > 0$ astfel încît $\frac{n^2+1}{n^4+1} < M$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$;

b) nu există $M > 0$ astfel încît $\frac{n^4+1}{n^3+1} < M$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

26. Să se indice două numere reale $a < b$ astfel încît $a < \frac{2n^2+n}{2n^2+1} < b$, pentru orice n natural.

27. Cîte zecimale exacte trebuie considerate pentru π şi pentru $\sqrt{2}$ astfel încît suma $\pi + \sqrt{2}$ să fie calculată cu o aproximare de cel mult 10^{-2}? Aceeaşi întrebare pentru $\pi\sqrt{2}$.

28. Fie $\frac{p}{q}$ ($p > 0$, $q > 0$ întregi) o aproximare a lui $\sqrt{2}$. Să se arate că numărul raţional $\frac{p+2q}{p+q}$ este o aproximare „mai bună" pentru $\sqrt{2}$.

29. Fie a, b numere reale fixate. Ce se poate spune despre a şi b în ipoteza că $|a - b| < \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$ întreg? Dar dacă $|a - b| < \varepsilon$ pentru orice număr raţional $\varepsilon > 0$?

30. Fie a, b numere reale fixate. Să se arate că dacă $a < b + \varepsilon$ pentru orice $\varepsilon > 0$, atunci $a \leqslant b$.

31. Să se arate că $\forall k \geqslant 1$, $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}$; deduceţi că pentru orice A există N natural astfel încît $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > A$ pentru orice $n \geqslant N$.

32. Să se verifice prin inducţie că $x^n \geqslant 1 + n(x-1)$ pentru orice n natural şi pentru orice $x > 0$ *(inegalitatea lui I. Bernoulli, 1654—1705)*.

§ 2. Funcţii reale. Operaţii cu funcţii reale

Se poate afirma că analiza matematică elementară revine la studiul funcţiilor de o variabilă reală cu valori reale. Acest studiu este cerut atît de nevoia de a descrie evoluţia unor procese fizice, tehnologice, economice, dar şi de însăşi dezvoltarea matematicii. În cea mai mare parte, cuprinsul acestui paragraf vă este cunoscut şi am căutat aici doar o prezentare sintetică. Vom urmări totodată sistematic modul cum se reflectă structurile (algebrice şi de ordine) dreptei reale asupra funcţiilor reale.

2.1. Funcţii reale; grafice, exemple

Reamintim că două funcţii $f : E \to F$, $g : E_1 \to F_1$ sînt *egale* dacă au loc egalităţile de mulţimi $E = E_1$, $F = F_1$ şi dacă $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in E$. În pofida simplităţii acestei definiţii, demonstrarea egalităţii a două funcţii poate să nu fie uşoară. De exemplu, dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci demonstrarea egalităţii funcţiilor f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x + a)^n$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} a^k$ revine la stabilirea formulei binomului lui Newton.

Reamintim că funcţiile cu valori în $\mathbf{R}$ se numesc *funcţii reale*. Să presupunem că $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcţie reală de o variabilă reală, definită pe o submulţime $D \subset \mathbf{R}$; atunci *graficul* ei G_f este submulţimea lui $\mathbf{R}^2$ formată din toate perechile $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ astfel încît $x \in D$ şi $y = f(x)$, adică

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}.$$

Se mai spune că relaţia

(3) $$y = f(x)$$

este *ecuaţia graficului* lui f. Făcînd convenţia de a fixa în plan un sistem ortogonal de axe xOy, de a considera D ca mulţime de puncte pe axa absciselor, iar valorile lui f ca puncte pe axa ordonatelor, graficul G_f este o submulţime de puncte din acel plan, anume submulţimea formată din punctele ale căror coordonate verifică relaţia (3). Graficul unei funcţii reale date nu poate fi întotdeauna reprezentat cu precizie şi se indică doar o schiţă aproximativă cuprinzînd puncte remarcabile ale graficului. Prin grafice se redau vizual caracteristici ale funcţiilor şi o imagine globală asupra valorilor funcţiei prin limbajul special oferit de desen. În unele cazuri, semnalele fizice, asimilate cu funcţii reale, au graficele indicate pe ecranul osciloscoapelor (în fig. I.4 apar două semnale).

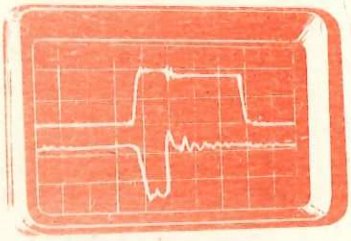


Fig. I.4

Exemple

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sin x$ este diferită de funcţia $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definită prin $g(x) = \sin x$. De exemplu, g este bijectivă, în timp ce f nu este nici injectivă nici surjectivă. Se spune, în acest caz, că f este o prelungire a lui g.

2) Multe legi fizice exprimă dependenţe ale unor mărimi de alte mărimi. Modelul matematic al lor îl constituie uneori funcţiile reale. De exemplu, formula $s = v \cdot t$ (legea mişcării rectilinii uniforme cu viteza constantă v) este strîns legată de funcţia reală $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $s(t) = v \cdot t$. „Graficul mişcării uniforme" este de fapt graficul funcţiei s. De obicei studiul mişcării este limitat la un interval de timp I şi atunci trebuie considerată funcţia $s : I \to \mathbf{R}$, $s(t) = v \cdot t$ (am folosit aceeaşi notaţie pentru funcţii care trebuie considerate distincte).

Multe teoreme din analiza matematică se referă la funcţii definite pe intervale. În anumite contexte fizice, barele rectilinii pot fi asimilate prin intervale; de asemenea, se vorbeşte curent de intervale de timp (definiţia noţiunii de interval a fost dată la pagina 9). Să considerăm o bară metalică asimilată cu un interval $I \subset \mathbf{R}$. Pentru orice punct $x \in I$ notăm cu $t(x)$ temperatura barei în punctul x. În acest mod este definită o funcţie reală $t : I \to \mathbf{R}$ (fig. I.5). Proprietăţile matematice posibile ale acestei funcţii: mărginire, monotonie, continuitate etc. sînt strîns legate de proprietăţi fizice ale barei considerate.

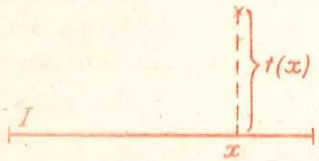


Fig. I.5

În cadrul rigorii matematice, ori de cîte ori este studiată o funcţie, trebuie indicate explicit, domeniul (mulţimea) ei de definiţie şi mulţimea de valori.

3) În unele consideraţii fizice este utilă funcţia următoare:

$$\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \text{ definită prin } \sigma(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ 1, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$$

numită *treapta unitate* (a lui O. Heaviside, 1850—1925), avînd graficul indicat în figura I.6 (săgeata corespunde capătului unui interval deschis).

Acesta este un exemplu de funcţie reală definită „cu acoladă". Astfel de funcţii apar în mod necesar în unele descrieri. Să presupunem că tensiunea U într-o reţea electrică

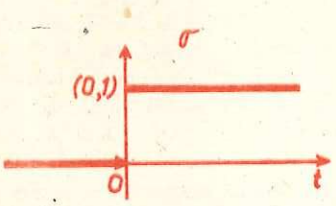


Fig. I.6

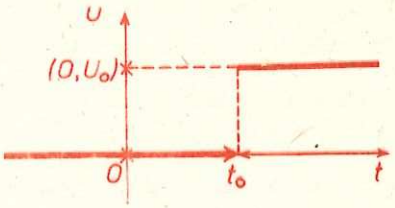


Fig. I.7

este egală cu zero pînă la un moment t_0 și are o valoare constantă U_0 începînd din acel moment. Funcția care modelează variația în timp a tensiunii din acea rețea este funcția $U : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$U(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă } t < t_0 \\ U_0, & \text{dacă } t \geqslant t_0 \end{cases}$$

avînd graficul indicat în figura I.7. De remarcat că funcția U este constantă pe fiecare din intervalele $(-\infty,\ t_0)$, $[t_0,\ \infty)$, dar nu este constantă pe $\mathbf{R}$. Are loc egalitatea $U(t) = U_0 \cdot \sigma(t - t_0)$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Pentru $t_0 = 0$, $U_0 = 1$, avem $U = \sigma$.

4) Se pot considera funcții reale mai neobișnuite avînd însă importanță teoretică: de exemplu, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ a lui P.L. Dirichlet (1805–1859), definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

2.2. Operații algebrice cu funcții reale

Fie $f : D \to \mathbf{R}$, $g : D \to \mathbf{R}$ două funcții reale definite pe aceeași mulțime D. Se pot considera atunci *funcția-sumă* $s = f + g$, $s : D \to \mathbf{R}$ definită prin $s(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in D$ și *funcția-produs* $p = fg$, $p : D \to \mathbf{R}$ definită prin $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall\, x \in D$. Se pot, de asemenea, defini *funcția-diferență* $f - g : D \to \mathbf{R}$ prin $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall\, x \in D$ și *funcția-cît* $h = \dfrac{f}{g}$, definită pe mulțimea $D_1 = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ prin $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\forall\, x \in D_1$.

Se observă că aceste funcții au fost definite folosind structura algebrică a dreptei reale, care este domeniul de valori (codomeniul) al funcțiilor f și g.

Exemple

1) Pentru funcțiile $f,\ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = (x + 2)^2$, $g(x) = (x - 2)^2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, suma $s = f + g$ este funcția $s : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $s(x) = (x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 2x^2 + 8$, iar funcția-cît $h = \dfrac{f}{g}$ este definită pe mulțimea $D_1 = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, prin $h(x) = \dfrac{(x + 2)^2}{(x - 2)^2}$, $\forall\, x \in D_1$.

2) Pentru funcțiile $f : [0,\ \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ și $g : (-\infty,\ 0) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ nu se pot defini $f+g$, $f-g$, fg și $\dfrac{f}{g}$, pentru că f și g nu au aceeași mulțime de definiție.

3) Orice funcție monom $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = ax^p$ (a real și $p \geqslant 0$ întreg) este obținută prin operații de produs între funcții constante și funcția identică $1_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$. Orice funcție polinomială $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ se obține prin sume finite de funcții-monom. Aceasta revine la faptul că există numere reale $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_0 \neq 0$ astfel încît $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $\forall x \in \mathbf{R}$ (dacă P are gradul n). În cazurile $n = 1$ și $n = 2$ regăsim funcțiile de gradul I (liniară) și de gradul II studiate în clasele anterioare. Funcțiile raționale sînt cîturi de funcții polinomiale; dacă P și Q sînt funcții polinomiale, atunci funcția rațională $\frac{P}{Q}$ este definită pe mulțimea $\{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

Observație. Structura de ordine pe mulțimea $\mathbf{R}$ permite introducerea unei relații de ordine și pe mulțimea funcțiilor reale definite pe o aceeași mulțime D. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ două funcții; scriem $f \leqslant g$ (și citim f este mai mică sau egală cu g pe mulțimea D) dacă $f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in D$. În mod similar, faptul că $f > 0$ înseamnă că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Relația „$f \leqslant g$" este reflexivă ($f \leqslant f$), tranzitivă ($f \leqslant g$, $g \leqslant h \Rightarrow f \leqslant h$) și antisimetrică ($f \leqslant g$, $g \leqslant f \Rightarrow f = g$), deci este o relație de ordine. Spre deosebire de relația de ordine pe mulțimea numerelor reale, în cazul funcțiilor relația de ordine nu este totală; anume fiind date două funcții $f, g : D \to \mathbf{R}$ *nu* rezultă în mod necesar $f \leqslant g$ sau $g \leqslant f$, ci se poate ca ele să nu fie comparabile.

Reamintim că dacă a, b sînt numere reale, atunci notăm cu $\max(a, b)$ și $\min(a, b)$ cel mai mare și respectiv cel mai mic dintre numerele a, b. Așadar

$$\max(a, b) = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \geqslant b \\ b, \text{ dacă } a < b \end{cases}, \quad \min(a, b) = \begin{cases} a, \text{ dacă } a \leqslant b \\ b, \text{ dacă } a > b \end{cases}.$$

Evident, $\max(a, b) = \max(b, a)$, $\min(a, b) = \min(b, a)$. Aceste noțiuni se pot extinde pentru un număr finit de numere reale.

Dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ sînt două funcții reale, atunci se pot defini funcțiile $h = \max(f, g) : D \to \mathbf{R}$, $h(x) = \max(f(x), g(x))$, $k = \min(f, g) : D \to \mathbf{R}$, $k(x) = \min(f(x), g(x))$. De asemenea, se definește funcția-modul $|f| : D \to \mathbf{R}$, $x \mapsto |f(x)|$. Așadar, pentru orice $x \in D$ avem:

$$|f|(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } f(x) = 0 \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$$

2.3. Compunerea și inversarea funcțiilor

Dacă $f : A \to B$, $g : B \to C$ sînt două funcții astfel încît domeniul de valori al lui f să coincidă cu domeniul de definiție al lui g, atunci se poate considera *funcția-compusă* $h = g \circ f$, $h : A \to C$ definită prin $h(x) = g(f(x))$, $\forall x \in A$.

Dacă $f_1 : A \to B$, $f_2 : B \to C$, $f_3 : C \to D$ sînt trei funcții, atunci se verifică imediat relația $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$; se mai spune că operația de compunere este asociativă.

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ și $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Are sens $h = g \circ f$ și se obține funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$. De asemenea, are sens și $k = f \circ g$, $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $k(x) = f(g(x)) = g(x)^2 = (\sqrt{x})^2 = x$, $\forall x \geqslant 0$.

2) Funcția $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $h(x) = \sin^2 x$ este tocmai $g \circ f$ pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = u^2$; în mod similar, funcția $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ este egală cu $g \circ f$ unde $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = \sin u$.

Fie $f : A \to B$ o funcție bijectivă. În acest caz se poate defini *inversa* lui f, anume funcția $f^{-1} : B \to A$, care asociază oricărui element $y \in B$ acel unic $x \in A$ astfel încît $f(x) = y$. Evident, $f^{-1} \circ f = 1_A$, $f \circ f^{-1} = 1_B$.

Dacă $f : A \to B$ este o funcție oarecare și $A' \subset A$ este o submulțime, atunci se poate defini submulțimea $\{f(x) \mid x \in A'\}$ a lui B, numită *imaginea* lui A' prin f și notată $f(A')$.

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3$ este bijectivă și inversa ei este $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

2) Funcția f: $\mathbf{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ nu poate fi inversată (nefiind injectivă). Dar prin restricție la intervalul $A = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se obține o funcție bijectivă.

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]; \text{ inversa acestei funcții este } \arcsin = \sin^{-1},$$

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

definită asociind oricărui număr $x \in [-1, 1]$ acel unic $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ astfel încît $\sin y = x$.

În mod similar, funcțiile $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $\operatorname{ctg} : (0, \pi) \to \mathbf{R}$, sînt bijective și admit respectiv următoarele inverse:

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $x \mapsto y$ (unde y este definit prin $\cos y = x$);

$\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $x \mapsto y$ unde $\operatorname{tg} y = x$;

$\operatorname{arcctg} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$, $x \mapsto y$ unde $\operatorname{ctg} y = x$.

EXERCIȚII (capitolul I, § 2)

1. Să se determine domeniul maxim de definiție pentru funcțiile f următoare (adică mulțimea acelor $x \in \mathbf{R}$ pentru care $f(x)$ are sens și este un număr real):

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{x^2}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{x^3-1}$

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}$

k) $f(x) = \dfrac{x-1}{|x|-1}$

l) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$

m) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+|x|}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+m}$ $(m \in \mathbf{R})$

o) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-16}$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-16}}$

q) $f(x) = \dfrac{1}{|x^4-16|-15}$

r) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$

s) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{1+x^3}$

t) $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

u) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$

v) $f(x) = \sqrt{\sin x}$

w) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

z) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$.

2. Să se traseze graficul funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

a) $f(x) = |x| + 2$

b) $f(x) = |2 - 4x|$

c) $f(x) = |x^2 - 1|$

d) $f(x) = x + |x|$

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \text{ sau } x \geqslant 3 \\ 2, & \text{dacă } 1 < x < 3 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ -x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

g) $f(x) = |1 + x - |x||$

h) $f(x) = \sin x + |\sin x|$.

i) $f(x) = \min\limits_{t \leqslant x} t^2$

j) $f(x) = \max(x, x^2)$

k) $f(x) = \min(1, x)$

l) $f(x) = \min(1, x, x^2)$

3. Se consideră intervalul $I = [0, 2]$. Să se traseze graficul funcției

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in I \\ 0, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$ și al funcției

$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in I \\ x, & \text{dacă } x \notin I \end{cases}$

4. Să se reprezinte grafic funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin:

a) $f(x) = -2x \cdot \operatorname{sgn} x$;
b) $f(x) = (x^2 + 1) \operatorname{sgn} x$;
c) $f(x) = 2x + \sigma(x)$;
d) $f(x) = x^2\sigma(x)$;
e) $f(x) = x\sigma(x-2)$;
f) $f(x) = \sigma(x) - \sigma(x-2)$;
g) $f(x) = (\sin x) \operatorname{sgn} x$;
h) $f(x) = (\sin x)\sigma(x)$.

5. Să se explicitezе $f(x)$ pentru funcțiile f ale căror grafice sînt indicate în figura I.8, unde $n \geqslant 1$ este întreg.

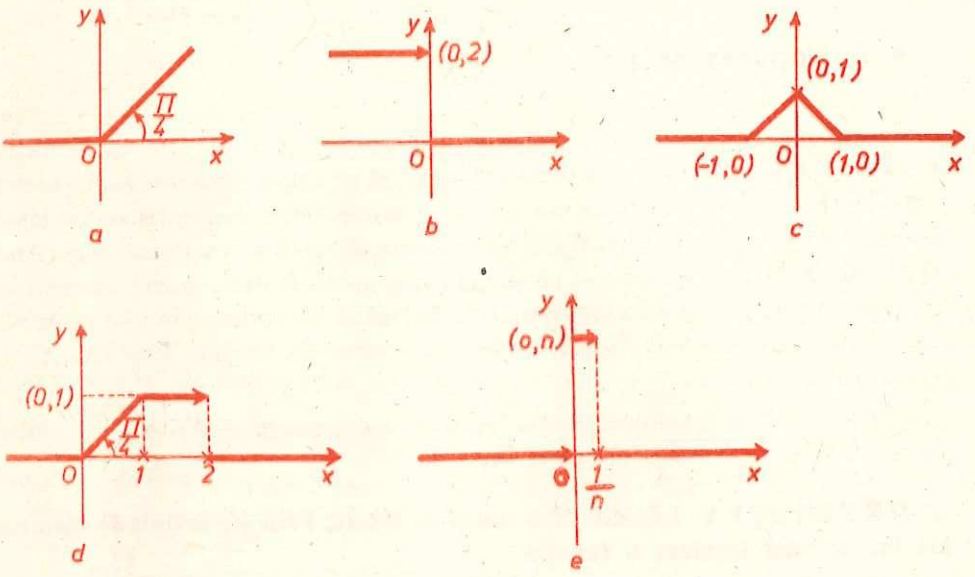


Fig. I.8

6. Să se determine funcția reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ știind că $f(x+1) = x^2 + 3x - 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$; idem, $f(2x - \pi) = \cos^2 x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și $f(1 - 2x) = |x|$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

7. a) Dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție reală fixată și se consideră funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin $g(x) = f(x - a)$ ($a \in \mathbf{R}$ constant), ce legătură există între graficele G_f, G_g?

b) Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție reală fixată și k o constantă reală. Se consideră funcțiile $u : D \to \mathbf{R}$, $v : D \to \mathbf{R}$ definite prin $u(x) = f(x) + k$, $v(x) = kf(x)$. Cum pot fi obținute graficele lui u și v din graficul lui f?

8. Presupunem construit graficul unei funcții reale $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Cum se obțin graficele funcțiilor $-f$, $|f|$, $\sigma \cdot f$, $\operatorname{sgn} f$?

9. Să se calculeze $g \circ f$, $f \circ g$ pentru următoarele perechi de funcții $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2 - x$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = |x|^3$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = x + |x|$, $g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ x^2, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$.

10. Se consideră funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x + 7$ și $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{2x - 2}$.

Să se determine o valoare $\delta > 0$ astfel încît:

a) $|f(x) - 9| < \dfrac{1}{100}$, dacă $|x - 1| < \delta$.

b) $g(x) < -100$, dacă $x \in (1 - \delta, 1)$.

§ 3. Noțiunea de șir

Există multe probleme de algebră, geometrie și chiar de matematică aplicată care utilizează șiruri. Este suficient să amintim progresiile aritmetice și geometrice, șirul perimetrelor $(p_n)_{n \geqslant 3}$ poligoanelor regulate cu n laturi înscrise într-un cerc, șirul rezultatelor intermediare într-un proces algoritmic etc. În același timp, vom vedea că șirurile constituie un important instrument teoretic și practic al analizei matematice. Intuitiv, un șir de elemente înseamnă „un element după altul" fiecare avînd un număr de ordine. Dar aceasta nu este o definiție.

Fie k un număr natural fixat. Vom nota $\mathbf{N}_k = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant k\}$, adică $\mathbf{N}_k = \{k, k + 1, k + 2, \ldots\}$. Deci $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$.

DEFINIȚIA I.1. Fie M o mulțime fixată. Prin șir infinit de elemente ale lui M vom înțelege o funcție

$$f : \mathbf{N}_k \to M,$$

unde k este un număr natural fixat.

În loc de șir infinit vom spune, pe scurt, șir.

Cel mai adesea avem $k = 0$ sau $k = 1$. Punînd $f(n) = a_n$, șirul f se mai notează $(a_n)_{n \geqslant k}$. Cele mai des utilizate șiruri vor fi scrise astfel: $(a_n)_{n \geqslant 0}$ sau $(a_n)_{n \geqslant k}$. Elementul a_n se numește *termenul de rangul n* al șirului; pentru $k = 1$ el este tocmai al n-lea termen al șirului.

Așadar, șirul de numere reale $(a_n)_{n \geqslant 0}$ este funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(n) = a_n$, $\forall\, n \geqslant 0$. Dacă $M = \mathbf{Q}$ (respectiv $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$), vom spune că avem un șir de numere raționale (respectiv irraționale).

Două șiruri $(a_n)_{n \geqslant k}$, $(b_n)_{n \geqslant k}$ sînt *egale* dacă $a_n = b_n$ pentru orice $n \geqslant k$.

Este important de făcut distincție între un șir și mulțimea termenilor săi (ceea ce revine la distincție între o funcție și imaginea acelei funcții). Astfel, șirurile $((-1)^n)_{n \geqslant 1}$ și $((-1)^{n+1})_{n \geqslant 1}$ sînt distincte, dar au aceeași mulțime a termenilor, anume $\{-1, 1\}$.

Pentru un șir $(a_n)_{n \geqslant 0}$ se poate considera submulțimea $\{(n, a_n) \mid n \in \mathbf{N}\}$ a lui $\mathbf{R}^2$, adică graficul șirului.

Exemple de şiruri

1) Dacă $a \in \mathbf{R}$, atunci se poate considera şirul constant $(a_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $a_n = a$ pentru orice întreg $n \geqslant 0$. Dacă $b \neq a$ este un alt număr real, atunci se poate considera şirul $(c_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin

$$c_n = \begin{cases} a, & \text{dacă } n \text{ este impar} \\ b, & \text{dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

care nu mai este un şir constant. Se observă că pentru orice $n \geqslant 0$ avem:

$$c_n = a \cdot \frac{1-(-1)^n}{2} + b \cdot \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

2) Şirul $(n)_{n\geqslant 0}$ se numeşte şirul numerelor naturale, a cărui mulţime de termeni este $\mathbf{N}$. Se pot, de asemenea, considera şirul $(2n)_{n\geqslant 0}$ al numerelor pare şi şirul $(2n+1)_{n\geqslant 0}$ al numerelor impare.

3) Indicăm un exemplu de şir care apare în unele consideraţii economice.

Presupunem costul iniţial al unei instalaţii egal cu C. După începerea funcţionării instalaţiei, acesta se micşorează treptat, deoarece în calcule economice se face convenţia că o parte din cost este transferată produselor obţinute cu ajutorul acelei instalaţii. Să notăm cu C_n costul acelei instalaţii după n ani de funcţionare, $n \geqslant 1$. Raportul $\mu = \dfrac{C - C_1}{C}$ se numeşte *coeficient de amortizare* a costului iniţial; deoarece $C_1 < C$, avem $0 < \mu < 1$. Pentru calculul lui C_n în funcţie de C, n, μ se observă mai întîi că $\mu C = C - C_1$, deci $C_1 = C(1-\mu)$; economiştii fac ipoteza că în anii următori se respectă aceeaşi regulă, adică $C_2 = C_1(1-\mu) = C(1-\mu)^2$, $C_3 = C_2(1-\mu) = C(1-\mu)^3$ etc. şi, în general, $C_n = C(1-\mu)^n$ pentru orice $n \geqslant 1$. Aşadar, este definit în mod firesc un şir de numere reale $(C_n)_{n\geqslant 0}$ unde $C_0 = C$.

Ca o aplicaţie concretă, să presupunem costul iniţial al instalaţiei $C = 500\,000$ lei şi după 4 ani, $C_4 = 20\,000$ lei. Ne propunem să determinăm costul instalaţiei după 8 ani şi să aflăm după cîţi ani costul acelei instalaţii devine mai mic decît 100 lei. Mai întîi, din relaţia $C_4 = C(1-\mu)^4$, rezultă $20\,000 = 500\,000\,(1-\mu)^4$, adică $25(1-\mu)^4 = 1$, de unde $\mu = 1 - \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Atunci $C_8 = C(1-\mu)^8 = 500\,000\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^8 = 800$ lei. Punînd condiţia $C_n < 100$, rezultă $500\,000\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^n < 100$, deci $n \geqslant 11$. Aşadar, după 11 ani costul acelei instalaţii coboară sub 100 de lei.

4) Pentru orice număr real $x = m, x_1x_2x_3\ldots$, $x > 0$, am notat cu $x^{(0)} = m$, $x^{(1)} = m + \dfrac{x_1}{10}$, $x^{(2)} = m + \dfrac{x_1}{10} + \dfrac{x_2}{100}$, ... trunchierile sale succesive. În acest mod, se obţine un şir de numere raţionale $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ asociat lui x. Reamintim că $0 \leqslant x - x^{(n)} < \dfrac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geqslant 0$, conform teoremei I.2.

5) Considerăm un semnal într-un interval I de timp, identificat cu o funcţie $\varphi : I \to \mathbf{R}$. Pentru orice moment $t \in I$, valoarea $\varphi(t)$ se numeşte *eşantionul* semnalului φ la momentul t. Pentru orice şir de momente $(t_n)_{n\geqslant 0}$ din I se poate considera şirul $(\varphi(t_n))_{n\geqslant 0}$ al eşantioanelor semnalului φ la momentele considerate.

§ 4. Submulțimi ale lui R

4.1. Submulțimi mărginite ale lui R

La acest punct vom preciza cîteva noțiuni importante legate de relația de ordine pe **R**. Pentru înțelegerea lor recomandăm folosirea reprezentării geometrice pe axă.

Fie $A \subset \mathbf{R}$ o submulțime nevidă. Reamintim că un element $b \in \mathbf{R}$ se numește *majorant pentru* A dacă el este mai mare decît toate elementele lui A, adică $x \leqslant b$ pentru orice $x \in A$. Dacă o mulțime admite majoranți, ea se numește *mărginită superior* sau *majorată*. În mod similar se definesc minoranții lui A (ca elemente $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $a \leqslant x$ pentru orice $x \in A$) și submulțimile mărginite inferior. Dacă un majorant b al lui A aparține lui A, atunci se spune că A are un *cel mai mare element* (anume b); acest număr este unic și este notat cu „max A". Similar, dacă mulțimea A are un minorant aparținînd lui A, atunci acesta este *cel mai mic element* al lui A, notat „min A".

Exemple

1) Dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p$ sînt numere reale și $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$, atunci minoranții lui A sînt numerele $\leqslant a_1$, iar majoranții lui A sînt numerele $\geqslant a_p$. Apoi $\min A = a_1$, $\max A = a_p$.

2) Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci $\max A = 1$, iar majoranții lui A sînt toate numerele reale mai mari sau egale cu 1. Arătăm că nu există $\min A$; într-adevăr, dacă ar exista $\min A$, atunci el aparține lui A, adică $\min A = \frac{1}{k}$, $k \geqslant 1$. Dar $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ și se obține o contradicție (anume în A ar exista elemente mai mici decît $\min A$). Minoranții lui A sînt toate numerele $a \leqslant 0$.

DEFINIȚIA I.2. O submulțime nevidă $M \subset \mathbf{R}$ se numește mărginită dacă ea este mărginită superior și inferior. Un șir infinit $(a_n)_{n \geqslant k}$ de numere reale se numește mărginit dacă mulțimea termenilor săi este mărginită.

Așadar, mulțimea M este mărginită dacă și numai dacă ea este conținută într-un interval compact $[\alpha, \beta]$ și este nemărginită în caz contrar. Șirul $(a_n)_{n \geqslant k}$ este mărginit dacă și numai dacă există numere reale $\alpha < \beta$ astfel încît $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$ pentru orice $n \geqslant k$.

Exemple

1) Orice interval mărginit este mulțime mărginită.

2) Dacă o submulțime $A \subset \mathbf{R}$ are un cel mai mare element, atunci $\max A$ este un majorant al lui A (chiar cel mai mic majorant al lui A), iar dacă există și $\min A$, atunci mulțimea A este mărginită și $A \subset [\min A, \max A]$.

3) Mulțimea **N** nu este mărginită superior, deci nu este mărginită. De asemenea, mulțimile **Z**, **Q**, **R** nu sînt mărginite.

4) Şirul $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ este mărginit deoarece toţi termenii săi aparţin intervalului $[0,1]$, adică $0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$. În mod similar, şirul $\left(\frac{1}{n-2}\right)_{n\geqslant 3}$ este mărginit deoarece $0 < \frac{1}{n-2} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 3$.

5) Şirul $\left(\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)_{n\geqslant 0}$ este mărginit deoarece $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 0$.

Mai general, un şir $(a_n)_{n\geqslant k}$ este mărginit dacă şi numai dacă există un număr $D > 0$ astfel încît $|a_n| \leqslant D$ pentru orice $n \geqslant k$.

La punctul 1.2 am enunţat axioma lui Cantor, conform căreia orice submulţime nevidă majorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mic majorant, notat „sup C".

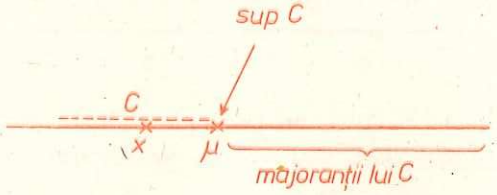


Fig. I.9

Numărul $\mu = \sup C$ este numit *marginea superioară a mulţimii* C şi el este caracterizat, aşadar, prin următoarele două condiţii:

1°. pentru orice $x \in C$ avem $x \leqslant \mu$;

2°. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $y \in C$ astfel încît $\mu - \varepsilon < y$ (pentru că $\mu - \varepsilon$ nu este majorant al lui C).

Prin simetrie faţă de origine, rezultă că orice submulţime minorată $C \subset \mathbf{R}$ admite un cel mai mare minorant, numit *marginea inferioară* a lui C şi notat „inf C".

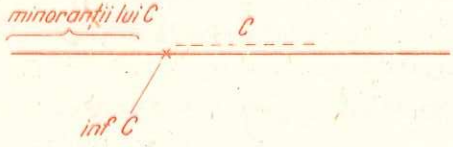


Fig. I.10

Aşadar, dacă o submulţime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ este mărginită, atunci ea admite marginile $\lambda = \inf C$ şi $\mu = \sup C$ şi intervalul $[\lambda, \mu]$ este cel mai mic interval compact care conţine C (cel mai mic în sensul ordinii date de incluziune). Remarcăm, de asemenea, că dacă pentru o mulţime $A \subset \mathbf{R}$ există $\min A$ (respectiv $\max A$), atunci A este minorată (respectiv majorată) şi $\inf A = \min A$ (respectiv $\sup A = \max A$).

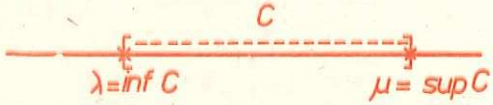


Fig. I.11

Exemple

1) Avem $\inf \mathbf{N} = \min \mathbf{N} = 0$, dar mulțimea $\mathbf{N}$ nu are margine superioară în $\mathbf{R}$ deoarece nu are majoranți.

2) Considerăm mulțimea $C = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\}$; în acest caz $\sup C = \max C = 1$. Arătăm apoi că $\inf C = 0$. Avem $0 \leqslant x$ pentru orice $x \in C$ și 0 este cel mai mare minorant; într-adevăr un număr $a > 0$ nu poate fi un minorant al lui C, deoarece există $n \geqslant 1$ întreg astfel încît $\frac{1}{n} < a$.

Pentru $C = \left\{ \frac{2n+1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\} = \left\{ 3,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{3},\ 2+\frac{1}{4},\ \ldots \right\}$, $\inf C = 2$, $\sup C = 3$.

3) Dacă $(a_n)_{n \geqslant k}$ este un șir mărginit de numere reale vom nota cu $\inf\limits_{n \geqslant k} a_n$ și respectiv $\sup\limits_{n \geqslant k} a_n$ marginea inferioară (respectiv superioară) a mulțimii termenilor șirului. Astfel

$$\inf_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = 0, \quad \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} = 1.$$

Adjuncționăm mulțimii $\mathbf{R}$ două noi elemente numite *minus infinit* (notat $-\infty$) și *plus infinit* (notat $+\infty$ sau ∞) și considerăm mulțimea

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

numită *dreaptă reală încheiată*. Așadar, $\mathbf{R}$ este o submulțime a lui $\overline{\mathbf{R}}$ și uneori elementele lui $\mathbf{R}$ se mai numesc numere *finite*. Pe mulțimea $\overline{\mathbf{R}}$ se poate introduce o relație de ordine, prelungind ordinea din $\mathbf{R}$, punînd

$$-\infty < \infty \text{ și } -\infty < x,\ x < \infty \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $a \in \mathbf{R}$ vom considera mulțimile: $[-\infty, a) = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid -\infty \leqslant x < a\}$ și $(a, \infty] = \{x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a < x \leqslant \infty\}$, numite tot intervale. Dacă o submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ nu este majorată, atunci se mai scrie simbolic $\sup C = \infty$, iar dacă C nu este minorată, $\inf C = -\infty$. Așadar, pentru orice submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$, mărginită sau nu, se pot calcula $\inf C$ și $\sup C$ în mulțimea $\overline{\mathbf{R}}$; în cazul cînd C este mărginită, aceste margini sînt finite.

Exemple: $\sup \mathbf{N} = \infty$, $\inf \mathbf{Z} = -\infty$, $\sup \mathbf{Z} = \infty$.

4.2. Noțiunea de vecinătate a unui punct

Fixăm un punct $a \in \mathbf{R}$.

DEFINIȚIA I. 3. Se numește vecinătate a punctului a orice mulțime $V \subset \mathbf{R}$ care conține un interval deschis centrat în a.

În acest caz există $r > 0$ astfel încît $(a - r, a + r) \subset V$.

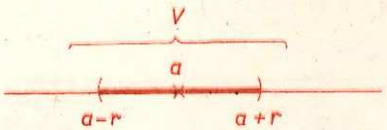


Fig. I.12

Exemple

1) Intervalele $(-4, 4)$, $[-2, 3)$, $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$, $\mathbf{R}$ sînt vecinătăţi ale originii, deoarece conţin intervalul deschis $(-1, 1)$ centrat în origine. Mulţimea $\mathbf{Z}$ nu este vecinătate a originii pentru că nu conţine nici un interval $(-r, r)$, cu $r > 0$.

2) Este evident că un interval deschis (a, b), $a < b$, este vecinătate a oricărui punct al său; intervalul închis $[a, b]$ este vecinătate a oricărui punct c, astfel încît $a < c < b$, dar nu este vecinătate a capetelor a, b.

3) Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ şi $a \neq b$, atunci există vecinătăţi disjuncte ale lor; într-adevăr, presupunem $a < b$ şi fie $r = \frac{b-a}{3}$. Atunci intervalele $(a - r, a + r)$, $(b - r, b + r)$ sînt vecinătăţi ale punctelor a, respectiv b şi sînt disjuncte (figura I.13).

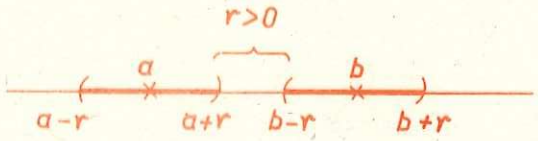


Fig. I.13

De asemenea, se pot defini vecinătăţile lui $-\infty$ sau ∞. Se numeşte *vecinătate* a lui ∞ (respectiv $-\infty$) orice mulţime $V \subset \overline{\mathbf{R}}$ care conţine un interval de forma $(b, \infty]$ (respectiv de forma $[-\infty, b)$), unde b este un număr real. De exemplu orice interval (b, ∞) la care se adaugă punctul ∞ însuşi este vecinătate a lui ∞, iar intervalul $(-\infty, b)$ reunit cu $\{-\infty\}$ este vecinătate a lui $-\infty$.

Cu ajutorul noţiunii de vecinătate se poate defini noţiunea de punct de acumulare al unei submulţimi a lui $\mathbf{R}$, care va fi utilizată în elaborarea conceptului de limită a unei funcţii.

DEFINIŢIA I.4. Fie $D \subset \mathbf{R}$ o submulţime. Un punct $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ se numeşte punct de acumulare pentru D dacă în orice vecinătate a lui α există cel puţin un punct din $D \setminus \{\alpha\}$.

Exemple

1) Pentru $D = (a, b)$, $a < b$, orice punct $\alpha \in [a, b]$ este un punct de acumulare.

2) Pentru $D = N$, ∞ este unicul punct de acumulare, iar mulţimea $\mathbf{Z}$ are pe $-\infty$, şi ∞ ca puncte de acumulare.

3) Pentru $D = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, orice număr real α este punct de acumulare, inclusiv 1, deoarece este satisfăcută condiţia din definiţia I.4. De asemenea, $-\infty$, ∞ sînt puncte de acumulare pentru D.

4) Mulţimea $D = (-1, 2] \cup \{3\}$ are ca puncte de acumulare punctele intervalului închis $[-1, 2]$, iar punctul 3 nu este punct de acumulare pentru D.

5) Submulţimile finite ale lui $\mathbf{R}$ nu au puncte de acumulare.

Un punct $x \in D$ care nu este punct de acumulare pentru $D \subset \mathbf{R}$ se numeşte *punct izolat*. În exemplul 4. de mai sus, $x = 3$ este punct izolat pentru D.

EXERCIŢII (capitolul I, § 4)

1. Să se scrie primii 6 termeni pentru fiecare din şirurile:

a) $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n \geq 0}$; b) $\left(\frac{n^2}{n-2}\right)_{n \geq 3}$; c) $\left(\frac{2n}{n!}\right)_{n \geq 1}$; d) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n \geq 0}$.

2. Folosind inegalitatea lui Bernoulli [$x^n \geqslant 1 + n(x-1)$, pentru orice $x > 0$, $n \in \mathbf{N}$] să se arate că

a) $1{,}02^{100} \geqslant 3$; $1{,}01^{100} \geqslant 11$.

b) dacă $0 < a < 1$ este fixat, atunci există N natural astfel încît $a^n < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N$.

c) dacă $a > 1$ este fixat, atunci există N natural astfel încît $a^n > 10$ pentru orice $n \geqslant N$ și nu există N natural astfel încît $a^n < \frac{1}{10}$ pentru orice $n \geqslant N$.

3. a) Fie $A \subset \mathbf{R}$ o mulțime mărginită. Să se arate că orice submulțime a lui A este mărginită.

b) Dacă A_1, A_2 sînt submulțimi mărginite ale lui $\mathbf{R}$ să se arate că $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, $A_1 \setminus A_2$ au aceeași proprietate.

4. Fie $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că

1°. $\max(a, b) = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min(a, b) = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

2°. dacă $\max(a, b) = \min(a, b)$, atunci $a = b$.

5. Să se determine minoranții și majoranții $\min A$, $\max A$ (dacă există) pentru următoarele submulțimi A ale dreptei reale:

a) $A = [-1, 1]$;

b) $A = (0{,}100)$;

c) $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$;

d) $A = [-2;2) \cup (3, 4]$;

e) $A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$;

f) $A = \left\{\frac{2^n - 1}{2^n + 1} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\right\}$.

6. Pentru orice submulțime nevidă $C \subset \mathbf{R}$ notăm $-C = \{-x \mid x \in C\}$. Să se arate că dacă C este mărginită, atunci $\sup(-C) = -\inf C$ și $\inf(-C) = -\sup C$.

7. Să se arate că mulțimile următoare sînt mărginite și să se indice în fiecare caz marginea inferioară și marginea superioară:

$M_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leqslant 2\}$, $M_2 = \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < 2\}$, $M_3 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^4 \leqslant 16\}$.

8. Să se arate că șirurile următoare sînt mărginite și să se determine $\inf\limits_n a_n$, $\sup\limits_n a_n$:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$, $n \geqslant 1$; b) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$, $n \geqslant 0$; c) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$;

d) $a_n = \dfrac{2n + 1}{n + 2}$, $n \geqslant 0$; e) $a_n = \min(10, n)$, $n \geqslant 0$; f) $a_n = \cos\dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$.

9. Să se arate că următoarele submulțimi A ale lui $\mathbf{R}$ sînt nemărginite și să se determine $\inf A$, $\sup A$ (calculate în $\overline{\mathbf{R}}$):

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant 0,\ x^2 > 3\}$;

b) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - x \leqslant 0\}$;

c) $A = \left\{\dfrac{x^2}{x + 1} \mid x > 0\right\}$;

d) $A = \{x - \sin x \mid x \in \mathbf{R}\}$.

10. Care din submulțimile $V \subset \mathbf{R}$ următoare sînt vecinătăți ale originii:

a) $V = (-1, 2)$;

b) $V = [0, \infty)$;

c) $V = (-3, 1) \cup (3, \infty)$;

d) $V = \mathbf{Q}$?

11. Fie $a = \dfrac{1}{2}$. Este $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ o vecinătate a punctului a? Dar intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$? Dar intervalul $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + r\right]$, $r > 0$?

12. Care din submulțimile următoare $V \subset \overline{\mathbf{R}}$ sînt vecinătăți pentru $-\infty$ sau $+\infty$;

a) $V = (0, \infty]$; b) $V = [-\infty, 5)$; c) $V = [-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; d) $V = \mathbf{Z}$?

13. Să se arate că originea este punct de acumulare pentru mulțimea $D = \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\}$ și că ∞ este punct de acumulare pentru $D = \{n^2 \mid n \geqslant 1 \text{ întreg}\}$.

14. Să se arate că punctul $\alpha = 8$ este punct de acumulare pentru submulțimile $D \subset \mathbf{R}$ următoare:

a) $D = (0, 8)$; b) $D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$; c) $D = \mathbf{Q}$;
d) $D = (8, \infty)$; e) $D = \mathbf{R} \setminus \{8, 12\}$; f) $D = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

15. Să se determine punctele de acumulare și punctele izolate ale submulțimilor $D \subset \mathbf{R}$ următoare:

a) $D = (-1, 1]$;

b) $D = (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$;

c) $D = \mathbf{Z}$;

d) $D = \left\{ \frac{1}{x} \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq 0 \right\}$;

e) $D = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1 \text{ întreg} \right\}$;

f) $D =$ domeniul maxim de definiție pentru $f(x) = \arcsin(x - \sqrt{1 - x^2})$.

16*. Fie $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geqslant 0$ un șir de intervale compacte, astfel încît $\forall\, n \geqslant 0$, $I_n \supset I_{n+1}$. Să se arate că intersecția $\bigcap_{n \geqslant 0} I_n$ este nevidă.

§ 5. Cîteva clase de funcții reale

În cele ce urmează, vom trece în revistă cîteva tipuri de funcții reale, de fapt o sinteză a unor noțiuni pe care le-ați întîlnit și în clasele anterioare. Se va subînțelege aici existența unui sistem ortogonal de axe xOy fixat în plan.

5.1. Funcții pare, funcții impare

Fie $D \subset \mathbf{R}$ o submulțime simetrică față de origine ($x \in D \Rightarrow -x \in D$) și o funcție $f : D \to \mathbf{R}$. Reamintim că f se numește *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in D$. *Graficul unei funcții pare este simetric față de axa Oy.* Într-adevăr, un punct (a, b) din $\mathbf{R}^2$ aparține lui G_f dacă și numai dacă simetricul $(-a, b)$ al lui față de axa Oy aparține lui G_f.

Funcția f se numește *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in D$; în acest caz, dacă $0 \in D$, atunci $f(0) = 0$. *Graficul unei funcții impare este simetric față de origine* deoarece un punct (a, b) din $\mathbf{R}^2$ aparține lui G_f dacă și numai dacă simetricul lui față de origine $(-a, -b)$ aparține lui G_f.

Exemple

1) Funcția $f(x) = x^n$ (n natural) este pară dacă n este par și impară dacă n este impar.

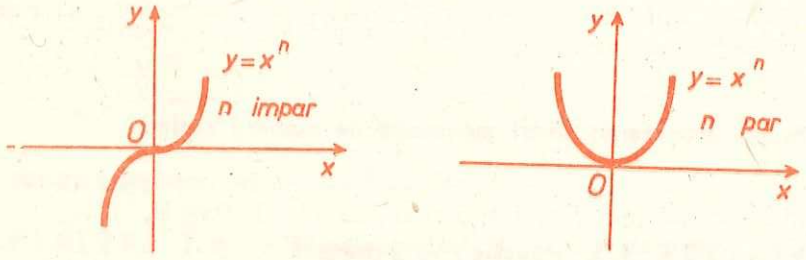


Fig. I.14

* Exercițiile și problemele notate cu asterisc prezintă un grad sporit de interes sau de dificultate.

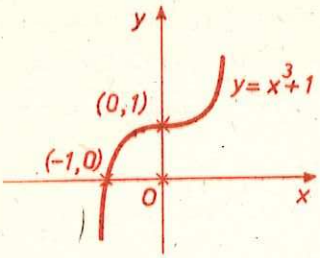


Fig. I.15

2) Suma și produsul a două funcții pare sînt funcții pare. Suma a două funcții impare este o funcție impară, iar produsul a două funcții impare este o funcție pară. Produsul unei funcții pare cu o funcție impară este o funcție impară.

Verificările necesare sînt imediate.

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$, nu este nici pară, nici impară (fig. I.15).

5.2. Funcții periodice

Se întîlnesc multe fenomene fizice care se repetă periodic: mișcarea Pămîntului în jurul axei sale (într-o primă aproximare), oscilații periodice, mișcări circulare periodice etc. Modelul matematic al lor este descris prin funcții reale periodice. Fie $T \neq 0$ fixat. Reamintim că o funcție reală $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) se numește *periodică* de perioadă T, dacă pentru orice $x \in D$ avem $x + T \in D$, $x - T \in D$ și $f(x + T) = f(x)$.

În acest caz, pentru orice n întreg nenul, nT este de asemenea o perioadă pentru f, iar mulțimea D este nemărginită. Dacă există o cea mai mică perioadă strict pozitivă, aceasta se numește *perioada principală* a lui f. Este atunci suficient ca studiul lui f să fie făcut pe un interval de lungime cît perioada principală.

Exemple

1) Funcțiile sin, cos sînt periodice avînd perioada principală 2π; mai general, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, $\omega \neq 0$ care se numește uneori semnal sinusoidal de amplitudine A, pulsație ω și fază φ, este funcție periodică avînd perioada principală $\frac{2\pi}{|\omega|}$.

2) Funcția lui Dirichlet $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

este periodică avînd ca perioadă orice număr rațional $T \neq 0$, deoarece dacă x este rațional (respectiv irațional), atunci $x + T$ și $x - T$ sînt la fel, deci $f(x + T) = f(x)$. În acest caz nu există perioadă principală.

5.3. Funcții monotone; șiruri monotone de numere reale

Fixăm o submulțime $D \subset \mathbf{R}$ și o funcție reală $f : D \to \mathbf{R}$.

DEFINIȚIA I.5. Funcția f se numește:

a) monoton crescătoare pe D, dacă

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

a') **strict crescătoare pe** D, **dacă**

$$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

b) **monoton descrescătoare pe** D, **dacă**

$$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

b') **strict descrescătoare pe** D, **dacă**

$$\forall\, x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

c) **monotonă pe** D **dacă** f **este sau monoton crescătoare sau monoton descrescătoare pe** D;

c') **strict monotonă pe** D, **dacă** f **este sau strict crescătoare sau strict descrescătoare pe** D.

Exemple

1) Funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^2$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, \infty)$ (considerînd de fapt restricţiile lui g) fără a fi monotonă pe $\mathbf{R}$. Funcţia g nu este monotonă pe nici un interval deschis care conţine originea.

2) Funcţia „sin" este strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dar nu este monotonă pe $[0, \pi]$.

În cazul cînd $D = \mathbf{N}$ se obţin definiţii corespunzătoare pentru şiruri de numere reale. Astfel, un şir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este **monoton crescător** dacă $a_n \leqslant a_{n+1}$ pentru orice $n \geqslant 0$ (adică $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$), **monoton descrescător** dacă $a_n \geqslant a_{n+1}$, $\forall\, n \geqslant 0$ (adică $a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$), **strict crescător** dacă $a_n < a_{n+1}$, $\forall\, n \geqslant 0$ etc. Un şir se numeşte **monoton** dacă el este monoton crescător sau monoton descrescător.

Exemple

1) Orice şir constant este monoton (atît crescător cît şi descrescător), dar nu este strict monoton.

2) Şirul $(n)_{n\geqslant 0}$ este strict crescător, iar şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ este strict descrescător.

3) Şirurile: $((-2)^n)_{n\geqslant 0}$, $\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\geqslant 0}$, $\left(\sin\frac{n\pi}{3}\right)_{n\geqslant 0}$ nu sînt monotone.

5.4. Funcţii mărginite, margini ale funcţiilor

DEFINIŢIA I. 6. O funcţie reală $f : D \to \mathbf{R}$ **se numeşte:**

a) **mărginită superior dacă mulţimea valorilor ei** (D) **este majorată, adică dacă există un număr real** B, **astfel încît** $f(x) \leqslant B$ **pentru orice** $x \in D$;

b) mărginită inferior dacă mulțimea valorilor ei este minorată, adică dacă există un număr real A, astfel încît $f(x) \geqslant A$ pentru orice $x \in D$;

c) mărginită dacă este mărginită inferior și superior, adică dacă există A, B reale, astfel încît $A \leqslant f(x) \leqslant B$, $\forall\, x \in D$ [sau, echivalent, dacă există $M > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant M$, pentru orice $x \in D$].

Evident, dacă $D \subset \mathbf{R}$, atunci funcția f este mărginită dacă și numai dacă graficul lui f este cuprins între două paralele la axa Ox.

Exemple

1) Funcțiile polinomiale reale de gradul I și de gradul II sînt mărginite pe orice interval închis $D = [a, b]$, dar nu sînt mărginite pe întreg $\mathbf{R}$.

2) Este evident că un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de numere reale este mărginit (definiția I.2) dacă și numai dacă funcția respectivă $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \mapsto a_n$ este mărginită.

3) Funcțiile sin, cos definite pe $\mathbf{R}$ sînt mărginite. Funcția tg: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este nemărginită, dar restricția ei la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ este mărginită.

4) Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este nemărginită (deoarece pentru orice $M > 0$, luînd $x_0 = \frac{1}{2M}$, rezultă $f(x_0) = 2M > M$). Restricția lui f la orice interval $[a, \infty)$, $a > 0$ este funcție mărginită, deoarece $|f(x)| \leqslant \frac{1}{a}$ pentru orice $x \in [a, \infty)$ (fig. I.16).

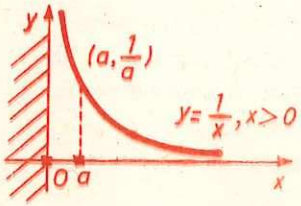


Fig. I.16

5) Este evident că suma, diferența și produsul a două funcții $f, g : D \to \mathbf{R}$ mărginite sînt funcții mărginite (nu același lucru este valabil pentru cît, așa cum arată exemplul funcțiilor sin și cos pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$).

Încheiem acest punct cu o ultimă noțiune referitoare la funcțiile mărginite, care apelează la proprietatea lui Cantor.

Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ este o funcție mărginită superior (respectiv inferior), atunci mulțimea tuturor valorilor sale, $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ este mărginită superior (respectiv inferior) și, ca atare, are margine superioară notată $\sup_{x\in D} f(x)$, respectiv inferioară, notată $\inf_{x\in D} f(x)$. Dacă f este mărginită, atunci, evident, $\inf_{x\in D} f(x) \leqslant \sup_{x\in D} f(x)$ și dacă are loc egalitatea, atunci f este constantă pe D.

Dacă f nu este mărginită superior se pune $\sup_{x\in D} f(x) = +\infty$, iar dacă nu, f este mărginită inferior se pune $\inf_{x\in D} f(x) = -\infty$.

Exemple

1) Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$. Restricțiile lui f la intervalul $D = [-1, 2]$ și la intervalul $D' = [-2, -1]$ sînt funcții mărginite. Avem

$$\inf_{x \in D} x^2 = 0, \sup_{x \in D} x^2 = 4, \inf_{x \in D'} x^2 = 1, \sup_{x \in D'} x^2 = 4.$$

2) $\inf_{x \in [0, 2]} x^3 = 0$, $\sup_{x \in [0, 2]} x^3 = 0$; $\inf_{x \in \mathbf{R}} \sin x = -1$, $\sup_{x \in \mathbf{R}} \sin x = 1$; $\inf_{x \in (0, 1)} (2x + 3) = 3$, $\sup_{x \in (0, 1)} (2x + 3) = 5$.

3) Funcția $f : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ nu este mărginită; avem $\inf_{x \in (0, 1)} \frac{1}{x} = 1$, $\sup_{x \in (0, 1)} \frac{1}{x} = +\infty$.

5.5. Cîteva funcții importante

Vom trece acum în revistă unele funcții importante, în legătură cu proprietățile de monotonie, mărginire, periodicitate.

a) Orice funcție polinomială P este definită pe întreg $\mathbf{R}$ și nu este mărginită și nici periodică (în cazul cînd gr $P \geqslant 1$). Monotonia lui P trebuie studiată de la caz la caz. Dacă gr $P \leqslant 1$, atunci funcția P este monotonă pe întreg $\mathbf{R}$, iar graficul lui P este o dreaptă. Funcția $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $P(x) = x^2$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ și are numai valori pozitive. Funcția $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = x^3$ este strict crescătoare și este nemărginită pe $\mathbf{R}$.

b) Orice funcție rațională $f = \frac{P}{Q}$ (P, Q fiind polinomiale) are ca domeniu maxim de definiție $D = \{x \in \mathbf{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Dacă Q nu are rădăcini reale, atunci $D = \mathbf{R}$. Nu se poate afirma, în general, nimic despre mărginirea sau monotonia funcțiilor raționale. De exemplu, funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, \infty)$ (figura I.17, *a*), dar funcția $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ nu este monotonă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ (figura I.17, *b*).

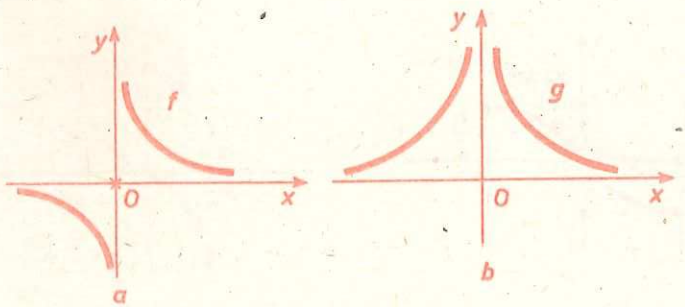


Fig. I.17

c) *Funcția exponențială* este definită pe întreg $\mathbf{R}$, $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 10^x$, având valori strict pozitive. Ea este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$, bijectivă și nu este mărginită (figura I.18, *a*). Inversa ei este funcția logaritmică $\lg : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \lg x$ (figura I.18, *b*) care este, de asemenea, strict crescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

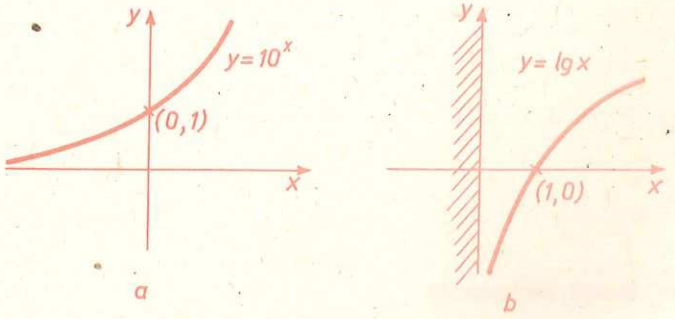


Fig. I.18

Dacă $a > 0$, $a \neq 1$, atunci pentru orice x se poate defini $a^x = 10^{x \cdot \lg a}$ și, cu aceasta, *funcția exponențială în baza a*, anume $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$. Această funcție este bijectivă și inversa ei este *funcția logaritmică* $\log_a$ (în baza *a*). Dacă $a > 1$, atunci ambele funcții sînt strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, ele sînt strict descrescătoare.

Dacă $\alpha \in \mathbf{R}$ este fixat se poate, de asemenea, defini *funcția putere de exponent* α, $h : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(x) = x^\alpha = 10^{\alpha \cdot \lg x}$. Pentru valori particulare ale lui α, domeniul maxim de definiție D al funcției putere se modifică. De exemplu, pentru $\alpha = 3$ avem $D = \mathbf{R}$, pentru $\alpha = \frac{1}{2}$, $D = (0, \infty)$, iar pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, $D = (0, \infty)$.

d) *Funcția-sinus* $\sin$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este mărginită și periodică de perioadă principală 2π; ea nu este monotonă pe $\mathbf{R}$ și nu este bijectivă. Restrîngînd convenabil domeniul de definiție și domeniul de valori, anume considerînd funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ se obține o funcție bijectivă, strict crescătoare (notată pentru comoditate la fel ca la început, fiind de fapt altă funcție). Graficul acestei funcții este indicat în figura I.19, *a*. Inversa

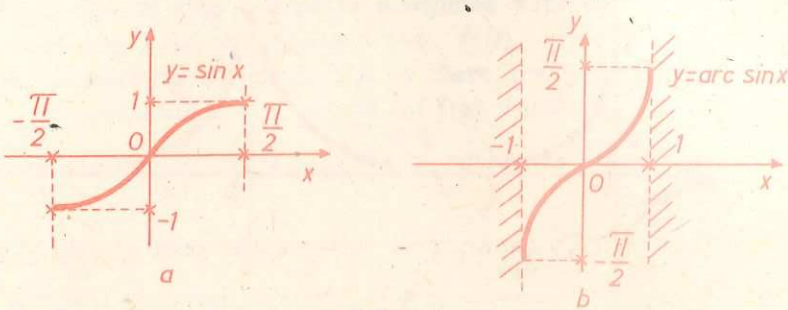


Fig. I.19

ei $\sin^{-1} = \arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este, de asemenea, strict crescătoare și are graficul indicat în figura I.19, *b*.

Funcția cos : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nu necesită un studiu aparte, deoarece $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. De asemenea, funcția arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ nu necesită un studiu special,deoarece $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $\forall\, x \in [-1, 1]$.

e) *Funcția-tangentă* este definită pe mulțimea $D = \mathbf{R} \setminus \{\cos x = 0\} = \mathbf{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$. Această funcție este periodică, de perioadă principală π și este nemărginită. Funcția $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare, nemărginită și bijectivă, iar inversa ei, $\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este strict crescătoare și mărginită (figura I.20).

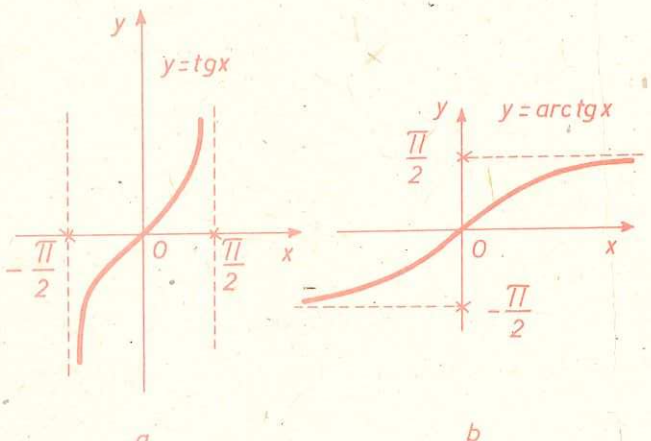


Fig. I.20

Funcțiile ctg, arcctg nu necesită un studiu special deoarece $\mathrm{ctg}\, x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ și $\mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\, x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Toate funcțiile considerate mai sus se mai numesc, cu un termen generic, *funcții elementare*.

EXERCIȚII (capitolul I, § 5)

1. Să se studieze paritatea și imparitatea funcțiilor $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^2 + 10$;

b) $f(x) = x^2 + x$;

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

d) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^4 + 1}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x}$;

f) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$;

g) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$;

h) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$;

i) $f(x) = x^2 \mid x \mid$;

j) $f(x) = -\sin^2 x$;

k) $f(x) = \frac{x}{1 + \mid x \mid}$;

l) $f(x) = \max(x, x^3)$.

2. Să se arate că funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare: $f(x) = |\sin x|$, $f(x) = \cos^2 x$, $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, $\omega \neq 0$ sînt periodice și să li se determine perioada principală.

3. a) Cum se poate exprima faptul că graficul unei funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric față de dreapta $x = a$? Dar față de punctul $(a, 0)$?

b) Să se arate că dacă graficul unei funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este simetric față de două drepte distincte $x = a$, $x = b$, atunci f este periodică.

4. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ este strict crescătoare pe orice interval; idem $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x^3 + 3x + 5$.

5. Să se studieze monotonia funcțiilor următoare pe intervalele pe care sînt definite:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1 + x^2$;

b) $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$.

6. Dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare și surjectivă, să se arate că f este bijectivă și că f^{-1} este strict crescătoare.

7. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ definită pe un interval I. Să se arate că f este monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe I dacă și numai dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, avem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant 0 \text{ (respectiv } \leqslant 0).$$

8. Dați exemplu de un șir:

a) mărginit, dar nu monton;

b) monoton, dar nemărginit.

9. Să se arate că șirurile $(a_n)_{n \geqslant 1}$ definite prin

$$a_n = n^2 + 1, \quad a_n = 2^n, \quad a_n = \frac{n!}{n + 1}, \quad a_n = \frac{2^n}{n}, \quad a_n = 3^{\sqrt{n}}$$

sînt monoton crescătoare.

10. Să se arate că următoarele funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt mărginite:

a) $f(x) = 3 \sin 2x$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{3 + x^2}$;

e) $f(x) = 2 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$;

$f(x) = 2^{-|x|}$.

11. Să se studieze mărginirea următoarelor funcții:

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{|x| + 1}$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$;

d) $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{|x - 1|}$;

e) $f : \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$;

f) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}$.

12. Să se determine $\inf\limits_{x\in D} f(x)$, $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ pentru următoarele funcţii $f : D \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = 2x - 1$, $D = [0, 1]$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $D = \mathbf{R}_+^*$;

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $D = [0, 1]$;

d) $f(x) = \cos 2x$, $D = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL I

1. *Să se determine toate valorile lui* $n \in \mathbf{N}$ *astfel încît*

a) $\dfrac{n}{n^2+1} < \dfrac{1}{10}$; b) $\left|\dfrac{4n}{n+3} - 4\right| > \dfrac{1}{10}$; c) $\left|\dfrac{2^n}{2^n+3} - 1\right| > \dfrac{1}{10}$.

Soluţie. a) Inegalitatea se scrie $n^2 - 10n + 1 > 0$ şi rezultă $n \in (-\infty, 5-\sqrt{24}) \cup (5+\sqrt{24}, \infty)$. Deoarece n este natural, se reţin doar valorile întregi şi pozitive, deci $n \geqslant 10$ şi $n = 0$; b) Deci, $\left|-\dfrac{12}{n+3}\right| > \dfrac{1}{10}$, adică $\dfrac{12}{n+3} > \dfrac{1}{10}$, de unde $n+3 < 120$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 116\}$; c) Rezultă $\dfrac{3}{2^n+3} > \dfrac{1}{10}$, deci $2^n < 27$, adică $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2. *Să se arate că există* N *natural astfel încît* $3^n > 100n$ *pentru orice* $n \geqslant N$. *Deduceţi că există* N *natural astfel încît* $0 \leqslant \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{1}{100}$ *pentru orice* $n \geqslant N$.

Soluţie. Încercăm valorile $n = 0, 1, 2, \ldots$ şi observăm că pentru $n = 6$ avem $3^6 = 729 > 600$, iar $3^7 > 700$, $3^8 > 800$ etc. Luînd $N = 6$, se verifică imediat prin inducţie că $3^n > 100\,n$ pentru $n \geqslant 6$. Partea secundă a exerciţiului este o consecinţă directă a primei părţi.

3. *Să se calculeze primii 4 termeni, diferenţa* $a_{n+1} - a_n$ *şi citul* $\dfrac{a_n}{a_{n+2}}$ *pentru fiecare din şirurile următoare:*

1°. $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$, $n \geqslant 1$;

2°. $a_n = 2^n$, $n \geqslant 0$.

Soluţie. 1°. $a_1 = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$, $a_2 = \dfrac{2^2+1}{2} = \dfrac{5}{2}$, $a_3 = \dfrac{10}{3}$, $a_4 = \dfrac{17}{4}$;

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2+1}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n^2+n} \text{ şi}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{\dfrac{n^2+1}{n}}{\dfrac{(n+2)^2+1}{n+2}} = \frac{(n^2+1)(n+2)}{n(n^2+4n+5)};$$

2°. $a_0 = 2^0 = 1$; $a_1 = 2^1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 8$; $a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ și $\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{2^n}{2^{n+2}} = \frac{1}{4}$.

4. *Să se arate că submulțimile următoare ale dreptei reale sînt mărginite și să se indice marginile lor inferioară și superioară:*

$M_1 = [1, 2)$, $M_2 = [1, 2] \cup \{5\}$, $M_3 = [1, 2] \cup \{-2, 5\}$, $M_4 = [1, 2] \cup (4, 7)$, $M_5 = \{3x + 2 \mid x \in [-1, 1]\}$, $M_6 = \{x^2 \mid x \in [0, 2]\}$, $M_7 = \{x^2 \mid x \in (-2, 2)\}$, $M_8 = \{7 \sin 2x \mid x \in \mathbf{R}\}$, $M_9 = \left\{ 5 + \sin 2x \mid x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \right\}$.

Soluție. Faptul că aceste mulțimi sînt mărginite este evident; de exemplu, toate sînt conținute în intervalul $[-10, 10]$. Avem $\sup M_1 = 2$ (pentru că majoranții lui M_1 sînt toate numerele $\geqslant 2$, iar 2 este cel mai mic); similar, $\sup M_2 = 5$, $\sup M_3 = 5$, $\sup M_4 = 7$, considerînd cel mai mic dintre majoranții mulțimilor respective. Apoi $M_5 = [-1, 5]$, $M_6 = [0, 4]$, $M_7 = [0, 4)$, $M_8 = [-7, 7]$, deci $\sup M_5 = 5$, $\sup M_6 = 4$, $\sup M_7 = 4$, $\sup M_8 = 7$.

Folosind faptul că marginea inferioară a unei mulțimi mărginite inferior este cel mai mare dintre minoranții acelei mulțimi, rezultă $\inf M_1 = 1$, $\inf M_2 = 1$, $\inf M_3 = -2$, $\inf M_4 = 1$, $\inf M_5 = -1$, $\inf M_6 = 0$, $\inf M_7 = 0$, $\inf M_8 = -7$. Studiem în detaliu cazul mulțimii M_9. Dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, rezultă $2x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin 2x \in (0, 1)$, deci M_9 coincide cu intervalul $(5, 6)$. Majoranții mulțimii M_9 sînt toate numerele $\geqslant 6$ și cel mai mic dintre ei va fi $\sup M_9 = 6$; similar, minoranții mulțimii M_9 sînt numerele $\leqslant 5$ și, ca atare, cel mai mare minorant va fi $\inf M_9 = 5$.

5. *Să se reprezinte grafic funcțiile* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

a) $f(x) = x \operatorname{sgn} x$; b) $f(x) = (2x + 1) \cdot \sigma(x)$; c) $f(x) = 3\sigma(x + 2)$;
d) $f(x) = \sigma(x) \cdot |\sin x|$; e) $f(x) = \max(4, x^2)$; f) $f(x) = 1 - |\,|x| - 1\,|$.

Care din aceste funcții sînt mărginite? Dar monotone? Dar pare?

Soluție. a) Așadar $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x > 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0, \text{ adică } f(x) = |x|; \\ -x, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ 2x + 1, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < -2 \\ 3, \text{ dacă } x \geqslant -2 \end{cases}$;

d) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ |\sin x|, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; e) $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ dacă } x \in (-2, 2) \\ x^2, \text{ dacă } x \notin (-2, 2) \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ dacă } x \leqslant -1 \\ -x, \text{ dacă } -1 < x \leqslant 0 \\ x, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$

Graficele respective sînt indicate în figura I.21.

Funcțiile de la punctele c, d sînt mărginite; funcțiile b, c sînt monoton crescătoare; funcțiile a, e, f sînt pare.

6. *Să se arate că șirurile* $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $b_n = \frac{3^n + 2^n}{5^n}$ $(n \geqslant 1)$ *sînt mărginite și monotone.*

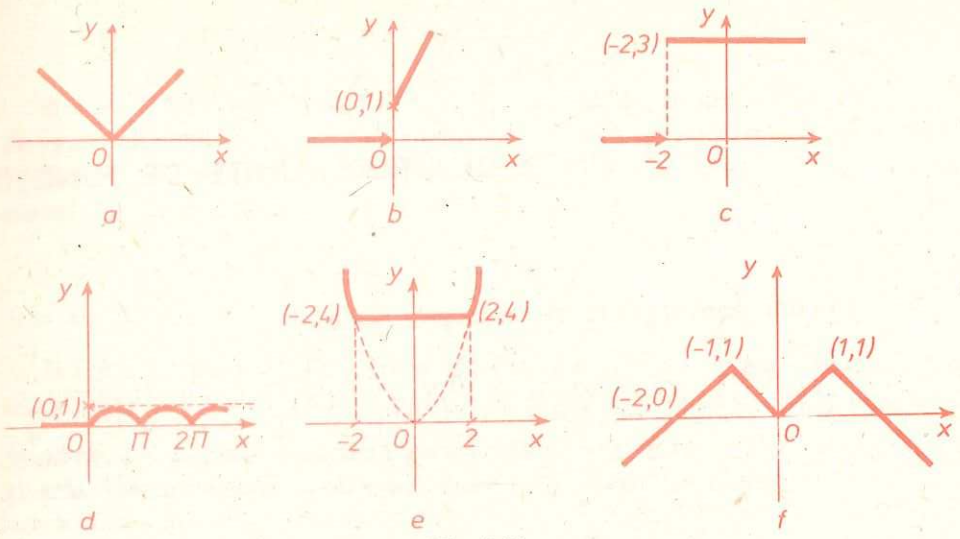


Fig. I.21

Soluție. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n \cdot 2}{n!(n+1)} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n}{n!}\left(\dfrac{2}{n+1} - 1\right) =$

$= \dfrac{-2^n(n-1)}{(n+1)!} \leqslant 0$, deci $a_{n+1} \leqslant a_n$ și șirul este monoton descrescător. Apoi $0 \leqslant a_n =$

$= \dfrac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n \text{ ori}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2}\left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2}{n}\right) \leqslant 2$, adică $a_n \in [0, 2]$ pentru orice $n \geqslant 1$.

Pe de altă parte, $b_n = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, deci $b_{n+1} < b_n$ și este evident că $0 \leqslant b_n \leqslant 2$, pentru orice $n \geqslant 1$. Ca atare, șirul $(b_n)_{n \geqslant 1}$ este de asemenea mărginit și monoton descrescător.

7. *Să se determine marginile funcțiilor* $f : D \to \mathbb{R}$ *pe mulțimile* D *indicate*:

a) $f(x) = 3x + 2$, $D = [-1, 1]$;

b) $f(x) = -(x-1)^2$, $D = [0, 3]$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - x$, $D = [0, 4]$;

d) $f(x) = a \sin x + b \cos x$ (a, b constante), $D = [0, 2\pi]$.

Soluție. a) Dacă $x \in [-1, 1]$, atunci $3x \in [-3, 3]$ și $f(x) \in [-1, 5]$; avem $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -1$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 5$.

b) $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -4$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = 0$; c) Funcția f este monoton descrescătoare pe D și $\sup\limits_{x \in D} f(x) = f(0) = 2$, $\inf\limits_{x \in D} f(x) = f(4) = 2\sqrt{5} - 4$; d) Dacă $a = 0$, atunci $f(x) = b \cos x$ și $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -|b|$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = |b|$. Dacă $a \neq 0$, atunci $f(x) = a\left(\sin x + \dfrac{b}{a} \cos x\right)$. Alegem $\varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încît $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ și rezultă $f(x) = a(\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x) =$

$= \dfrac{a}{\cos \varphi} \sin(x + \varphi)$. Deoarece $\cos \varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \dfrac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, rezultă $f(x) =$

$= \dfrac{a}{|a|}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$. Ca atare, $\inf\limits_{x \in D} f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}$, $\sup\limits_{x \in D} f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Reținem totodată că $|a \sin x + b \cos x| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

Capitolul II
LIMITE DE ŞIRURI. LIMITE DE FUNCŢII

§ 1. Şiruri convergente de numere reale

Despre „convergenţă" avem cu toţii o anumită reprezentare intuitivă. Iată un exemplu simplu, deşi puţin forţat. Să presupunem că $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ reprezintă temperaturi *pozitive* măsurate la momente succesive de timp. Ce sens trebuie dat afirmaţiei că aceste temperaturi converg către zero? Intuitiv, aceasta înseamnă că temperaturile respective sînt „din ce în ce mai mici", adică pentru orice prag de temperatură $\varepsilon > 0$, avem $t_n < \varepsilon$ de la un rang N încolo, adică pentru orice $n \geqslant N$ (N depinzînd de ε) (fig. II.1). Dacă t_n, $n \geqslant 0$ *nu* sînt neapărat pozitive, faptul că ele converg către zero se exprimă prin aceea că $\forall \varepsilon > 0$, avem $-\varepsilon < t_n < \varepsilon$, adică $|t_n| < \varepsilon$, de la un rang încolo.

Dăm un alt exemplu. Să considerăm o cantitate de substanţă radioactivă A, care se înjumătăţeşte la fiecare 12 ore. Măsurînd-o la fiecare 12 ore, cantităţile vor fi succesiv $A, \frac{A}{2}, \frac{A}{4}, \ldots, \frac{A}{2^n}, \ldots$ (omitem structura atomică şi presupunem materia indefinit divizibilă). Intuitiv, aceste cantităţi converg către zero (fig. II.2); de altfel, pentru orice prag $\varepsilon > 0$ avem $\frac{A}{2^n} < \varepsilon$ de la un rang încolo (anume, alegem N astfel încît $2^N > \frac{A}{\varepsilon}$ şi atunci pentru orice $n \geqslant N$ avem $\frac{A}{2^n} \leqslant \frac{A}{2^N} < \varepsilon$). Aşadar, în orice vecinătate a originii se află toţi termenii şirului $\frac{A}{2^n}$, începînd de la un rang încolo.

Astfel de exemple sînt numeroase şi au impus următoarea definiţie a cărei înţelegere este esenţială.

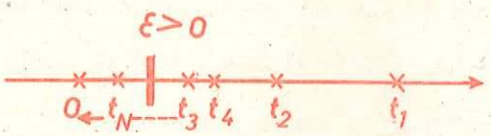


Fig. II.1

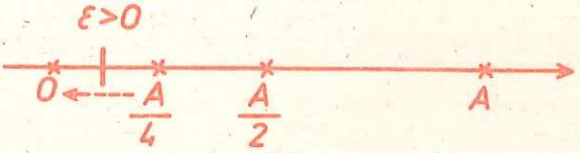


Fig. II.2

1.1. Şiruri avînd limită, şiruri convergente

DEFINIŢIA II. 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Se spune că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita a dacă în orice vecinătate a punctului a se află toţi termenii şirului începînd de la un anumit rang. Se scrie atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

De exemplu, faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ revine la aceea că, pentru orice vecinătate V a originii, există un rang N astfel încît $a_n \in V$, pentru orice $n \geq N$.

DEFINIŢIA II. 2. Orice şir de numere reale avînd o limită finită se numeşte convergent. Dacă $a \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci se mai spune că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent către a. Şirurile care nu au limită şi cele care au limita $+\infty$ (sau $-\infty$) se numesc divergente.

Exemple

1) Fie $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Arătăm că $(a_n)_{n\geq 1}$ este un şir convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a punctului $a = 0$. Atunci există $\varepsilon > 0$, astfel încît $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$ şi se observă că dacă $n > \frac{1}{\varepsilon}$, atunci $\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon) \subset V$, adică toţi termenii şirului $a_n = \frac{1}{n}$ se află în V, începînd cu rangul $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (căci dacă $n \geq N$, atunci $n > \frac{1}{\varepsilon}$).

2) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a lui $+\infty$, deci există $\varepsilon > 0$, astfel încît $(\varepsilon, \infty) \subset V$. Punînd condiţia $n^2 > \varepsilon$, rezultă că $n^2 \in V$. Cu alte cuvinte, luînd $N = [\sqrt{\varepsilon}] + 1$, rezultă că $\forall\, n \geq N$, avem $n > \sqrt{\varepsilon}$, deci $n^2 > \varepsilon$, adică $n^2 \in V$, deci toţi termenii şirului $a_n = n^2$ aparţin lui V de la un rang încolo şi, ca atare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3) Arătăm că, în general, **dacă $(a_n)_{n\geq k}$ este un şir monoton crescător şi nemărginit, atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. Într-adevăr, fie V o vecinătate oarecare a originii. Alegem $\varepsilon > 0$, astfel încît $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Deoarece şirul (a_n) este nemărginit, există N natural, astfel încît $a_N > \frac{1}{\varepsilon}$. Şirul fiind monoton crescător, avem $a_n \geq a_N$ pentru orice $n \geq N$. Aşadar, $0 < \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_N} < \varepsilon$, deci $\frac{1}{a_n} \in (0, \varepsilon) \subset V$, pentru orice $n \geq N$. În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

În particular, deoarece şirurile $(n^\alpha)_{n\geq 1}$, $\alpha > 0$; $(10^n)_{n\geq 0}$; $(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n})_{n\geq 1}$; $(n!)_{n\geq 0}$ sînt monoton crescătoare şi nemărginite, rezultă relaţiile:

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}} = 0 \text{ şi } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$$

TEOREMA II. 1. *(unicitatea limitei).* **Dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.**

Demonstraţie. Presupunem că $a_n \to a$ şi $a_n \to b$ (pentru $n \to \infty$) şi avem de arătat că $a = b$. Dacă, prin reducere la absurd, avem $a \neq b$, atunci alegem vecinătăţi V_1 şi V_2 ale punctelor a şi respectiv b, care să fie disjuncte (fig. II.3). Deoarece $a_n \to a$, atunci în V_1 se vor afla toţi termenii şirului de la un rang N încolo; în particular, în afara lui V_1, deci în V_2 se vor afla doar un număr finit (cel mult $N + 1$) de termeni ai şirului $(a_n)_{n \geq 0}$, deci b nu poate fi limita şirului $(a_n)_{n \geq 0}$.

TEOREMA II. 2. *(de caracterizare a limitelor de şiruri).* **Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir de numere reale.**

1°. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent către un număr $a \in \mathbf{R}$ dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia următoare:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ depinzînd} \\ \text{de } \varepsilon, \text{ astfel încît } |a_n - a| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N \end{cases}$$

(cu ajutorul cuantificatorilor logici, această condiţie se scrie astfel:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N = N(\varepsilon);\ \forall\, n \geq N,\ |a_n - a| < \varepsilon).$$

2°. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă:

$$(3)\quad \begin{cases} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ astfel} \\ \text{încît } a_n > \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq N. \end{cases}$$

3°. Şirul $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă

$$(3')\quad \begin{cases} \text{pentru orice } \varepsilon > 0 \text{ există un număr natural } N = N(\varepsilon), \text{ astfel încît} \\ a_n < -\varepsilon \text{ pentru orice } n > N. \end{cases}$$

Demonstraţie. 1°. Presupunem că a este un număr real şi că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Atunci, conform definiţiei II.1, pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ se află toţi termenii şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ de la un rang încolo, adică există N natural depinzînd de ε, astfel ca pentru $n \geq N$ să avem $a_n \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, sau echivalent, $|a_n - a| < \varepsilon$. Aşadar, este îndeplinită condiţia (2). Reciproc, dacă condiţia (2) este îndeplinită, arătăm că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Pentru aceasta, aplicăm definiţia II.1 şi fie V o vecinătate oarecare a punctului a, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \subset V$. Conform (2), există $N = N(\varepsilon)$ natural

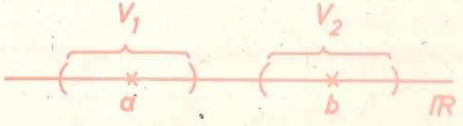


Fig. II.3

astfel încît $|a_n - a| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Aceasta înseamnă că $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, adică $a_n \in V$ pentru orice $n \geqslant N$. Deci toți termenii șirului aparțin lui V de la un rang încolo, adică $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

2°. Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, în intervalul $(\varepsilon, \infty]$ care este o vecinătate a punctului $+\infty$, se vor afla toți termenii șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$ de la un rang $N = N(\varepsilon)$ încolo, adică $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Reciproc, dacă este îndeplinită condiția (3), atunci pentru orice vecinătate V a lui ∞ alegem $\varepsilon > 0$, astfel încît $(\varepsilon, \infty] \subset V$. Conform ipotezei, există $N = N(\varepsilon)$ natural, astfel încît pentru orice $n \geqslant N$ să avem $a_n > \varepsilon$, adică $a_n \in V$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Punctul 3° se demonstrează similar, folosind faptul că vecinătățile lui $-\infty$ sînt intervale de forma $[-\infty, -\varepsilon)$ etc. De altfel, $a_n \to -\infty \Leftrightarrow -a_n \to \infty$.

Observație. Dacă a este un număr real, faptul că un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către a revine la aceea că șirul de numere reale pozitive $(|a_n - a|)_{n\geqslant 0}$ are limita zero, adică șirul distanțelor $(d(a_n, a))_{n\geqslant 0}$ are limita zero, ceea ce exprimă faptul că termenii a_n devin „din ce în ce mai apropiați de a, pe măsură ce n crește". Reținem totodată că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, a) = 0$.

Faptul că $a_n \to a$ (pentru $n \to \infty$) se mai interpretează spunînd că termenii $a_0, a_1, a_2, \ldots$ constituie aproximații succesive ale numărului real a; în acest caz, se poate considera formula aproximativă $a_n \simeq a$, cu eroarea absolută $|a - a_n|$ convergentă către zero.

Exemple

1) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$, folosind condiția (2) din teorema II.2. Notînd $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$, avem $|a_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiția $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, adică $n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ sau $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, are loc pentru orice $n \geqslant N$ unde $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$.

2) Arătăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10^n}{10^n+1} = 1$; notînd $c_n = \frac{10^n}{10^n+1}$, avem $|c_n - 1| = \frac{1}{10^n+1}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n+1} = 0$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

3) Orice șir constant $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $a_n = a$ pentru orice $n \geqslant 0$ este convergent către a. Aceasta se verifică direct din definiția II.1.

4) Șirurile convergente nu sînt neapărat monotone; astfel, șirul $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ este convergent către zero deoarece $|a_n - 0| = \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geqslant 1$ și nu este monoton.

5) Avem $\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$; într-adevăr, să aplicăm definiția II.1. Orice vecinătate V a punctului ∞ conține un interval de forma $(a, \infty]$. Alegem N natural astfel încît $N+1>a$. Atunci pentru orice $n\geqslant N$ avem $n+1\geqslant N+1>a$, adică $n+1\in V$.

În mod similar, se arată că $\lim_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$, $\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$, $\lim_{n\to\infty}(-2n+1)=-\infty$.

1.2. Convergență și mărginire

Demonstrăm acum cîteva rezultate importante care arată legătura dintre noțiunile de convergență și mărginire a șirurilor. Mai întîi dăm noțiunea de subșir.

DEFINIȚIA II.3. *Fie $s=(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de numere reale. Dacă $k_0<k_1<k_2<\ldots k_n<\ldots$ este un șir strict crescător de numere naturale (deci $k_n\geqslant n$ pentru orice $n\geqslant 0$), atunci șirul $(a_{k_n})_{n\geqslant 0}$ se numește subșir al lui s.*

Exemplu

Luînd $k_n=2n$ se obține subșirul $(a_{2n})_{n\geqslant 0}$ al lui s al termenilor de rang par și pentru $k_n=2n+1$, subșirul $(a_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ al termenilor de rang impar.

Dacă șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limita l (în $\overline{\mathbb{R}}$), atunci orice subșir $(a_{k_n})_{n\geqslant 0}$ al său are, de asemenea, limita l; într-adevăr, în orice vecinătate V a lui l se află toți termenii a_n de la un rang N încolo (pentru $n\geqslant N$), deci în V se află și toți termenii a_{k_n} cu $n\geqslant N$, deoarece $k_n\geqslant n\geqslant N$.

Din acest fapt se deduce direct că *dacă un șir are un subșir divergent sau are două subșiruri convergente către limite distincte, atunci acel șir este divergent.* De exemplu, pentru șirul $a_n=(-1)^n$, $n\geqslant 1$, subșirul $(a_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge către 1, iar subșirul $(a_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ converge către -1, deci șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este divergent.

Teorema următoare arată că mărginirea unui șir este o condiție necesară de convergență.

TEOREMA II.3. Orice șir convergent de numere reale este mărginit.

Demonstrație. Fie $a\in\mathbb{R}$ și un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ convergent către a. Considerăm vecinătatea $V=(a-1, a+1)$ a punctului a. Toți termenii șirului $(a_n)_{n\geqslant 0}$, începînd de la un rang N, sînt situați în V, deci *toți* termenii șirului, inclusiv $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ vor fi situați într-un interval mărginit I, care conține V (figura II.4). Putem lua $I=[c, d]$, unde $c=\min(a-1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ și $d=\max(a+1, a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$.

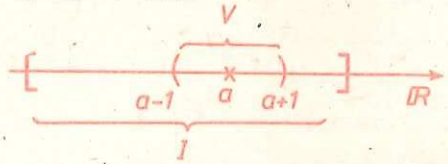


Fig. II.4

Remarcăm că dacă $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, atunci șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este în mod necesar nemărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu, șirul $a_n=(-2)^n$, $n\geqslant 0$ este nemărginit, dar nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$, deoarece $a_{2n}\to\infty$ și $a_{2n+1}\to-\infty$.

Observație. Am văzut că orice șir convergent în $\mathbf{R}$ este mărginit. Reciproca este în general falsă; de exemplu, șirul $a_n = (-1)^n$, $n \geqslant 1$ este mărginit, dar am văzut că nu este convergent. Vom demonstra totuși că șirurile *monotone* și mărginite de numere reale sînt convergente (teorema lui Weierstrass). De asemenea, vom arăta că orice șir mărginit are cel puțin un subșir convergent (lema lui Cesaró).

1.3. Criterii suficiente de convergență a șirurilor

Dăm mai întîi un criteriu care asigură convergența unui șir prin utilizarea unor șiruri-tip care converg către zero sau către $+\infty$, $-\infty$.

TEOREMA II.4. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de numere reale.

1°. Presupunem că l este un număr real și că există un șir $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de numere reale pozitive convergent către zero astfel încît $|a_n - l| \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fiind un rang fixat).

Atunci șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2°. Dacă $(u_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ și dacă $a_n \geqslant u_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3°. Dacă $(v_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ și $a_n \leqslant v_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Demonstrație. 1°. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Deoarece $b_n \to 0$, există un rang N depinzînd de ε astfel încît $b_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Dacă $n \geqslant \max(N, k)$, atunci $|a_n - l| \leqslant b_n < \varepsilon$ și astfel este îndeplinită condiția (2); ca atare, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

2°. Verificăm condiția (3). Deoarece $u_n \to \infty$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ astfel încît $u_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Așadar, $a_n > \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant \max(N, k)$, deci $a_n \to \infty$.

3°. Se procedează similar verificînd condiția (3').

Luînd cazul particular $b_n = \frac{1}{n}$, rezultă direct

COROLARUL 1. Dacă $|a_n - l| < \frac{1}{n}$, $\forall n \geqslant 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$.

În cazul particular cînd $l = 0$ și toate numerele a_n sînt pozitive, se obține

COROLARUL 2. Dacă $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant k$ (k fiind un rang fixat) și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple

1) Pentru orice număr real x șirul $(x^{(n)})_{n\geqslant 0}$ al trunchierilor sale succesive este convergent și are limita x. Într-adevăr, știm că $|x^{(n)} - x| < \frac{1}{10^n}$ pentru orice $n \geqslant 0$ și aplicăm teorema II.4, observînd că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

2) Fie $a_n = \frac{\sin^2 n}{n}$, $n \geqslant 1$. Avem $|a_n - 0| \leqslant \frac{1}{n}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. În mod similar, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

3) Notăm $a_n = \sqrt[n]{n} - 1$, $n \geqslant 1$. Evident, $a_n \geqslant 0$ și $1 + a_n = \sqrt[n]{n}$, deci $n = (1+a_n)^n$ și, ca atare, $n = 1 + C_n^1 a_n + C_n^2 a_n^2 + \ldots + a_n^n$, deci $n \geqslant C_n^2 a_n^2$. Atunci $n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} \cdot a_n^2$ și cum $a_n \geqslant 0$, se deduce inegalitatea $a_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ pentru orice $n \geqslant 2$. Aplicînd corolarul 2 pentru șirul $b_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}}$, $n \geqslant 2$ care converge către zero, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4) Orice număr real x este limita unui șir de numere raționale (respectiv irraționale). Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geqslant 1$, în intervalul $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right)$ alegem un număr rațional r_n (respectiv un număr irațional z_n). Atunci $|r_n - x| < \frac{1}{n}$, $|z_n - x| < \frac{1}{n}$ și, conform corolarului 1, rezultă $r_n \to x$, $z_n \to x$.

5) Fie $C \subset \mathbb{R}$ o submulțime, infinită, majorată și $\mu = \sup C$. Arătăm că *există un șir de puncte din C convergent către μ*. Într-adevăr, pentru orice întreg $n \geqslant 1$, în intervalul $\left(\mu - \frac{1}{n}, \mu\right)$ există cel puțin un punct $x_n \in C$. Așadar, $\mu - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \mu$, deci $|x_n - \mu| < \frac{1}{n}$, deci $x_n \to \mu$. În mod similar, pentru orice mulțime infinită minorată $D \subset \mathbb{R}$ există șiruri de puncte din D care converg către $\inf D$.

6) Dacă $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $|a_n| \to |a|$; într-adevăr, conform teoremei I.1, M_5 avem $||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a|$ pentru orice $n \geqslant 0$ și aplicăm teorema II.4.1°.

Un alt criteriu suficient de convergență, extrem de util, este cuprins în următoarea teoremă atribuită lui K. Weierstrass.

TEOREMA II.5. a) **Orice șir monoton crescător și mărginit superior de numere reale (în $\mathbb{R}$) este convergent.**

b) **Orice șir monoton descrescător și mărginit inferior în $\mathbb{R}$ este convergent.**

Demonstrație. a) Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir monoton crescător și mărginit superior. Conform proprietății lui Cantor, există numărul real $c = \sup\limits_n a_n$. Pentru

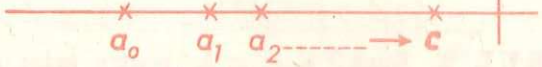


Fig. II.5

orice $\varepsilon > 0$ fixat, există un termen a_N al șirului astfel încît $a_N > c - \varepsilon$. Deoarece șirul este monoton crescător, pentru orice $n \geqslant N$ avem $a_n \geqslant a_N$, deci $c - \varepsilon < a_N \leqslant a_n \leqslant c < c + \varepsilon$, de unde $-\varepsilon < a_n - c < \varepsilon$, adică $|a_n - c| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$. Se verifică astfel condiția (2) și, ca atare, $a_n \to c$.

b) Se demonstrează similar, arătînd că $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge către $d = \inf\limits_n a_n$.

Reținem că un șir mărginit și monoton crescător (respectiv descrescător) converge către marginea lui superioară (respectiv inferioară). Teorema II.5 se mai enunță pe scurt astfel: *orice șir monoton și mărginit de numere reale este convergent.*

Exemple

1) Șirul $a_n = \dfrac{2n-1}{n}$, $n \geqslant 1$ este mărginit deoarece $0 \leqslant a_n \leqslant 2$, $\forall\, n \geqslant 1$ și monoton crescător, deci el este șir convergent. Se verifică imediat că $a_n \to 2$.

2) Sirul $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$ este crescător [deoarece $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, deci $a_{n+1} > a_n$] și mărginit superior [căci $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ pentru orice $k \geqslant 2$, deci $a_n \leqslant 1 + \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$]. Așadar, el este convergent. Este dificil de calculat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ cu metodele anterioare.

LEMĂ *(E. Cesaró, 1859–1906).* **Orice șir mărginit de numere reale are cel puțin un subșir convergent.**

Demonstrație. Fie $s = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir mărginit și notăm cu A mulțimea termenilor săi. Deoarece A este mulțime mărginită, ea este conținută într-un interval închis $I_0 = [a, b]$. Considerăm intervalele $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$, $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. În cel puțin unul din ele, notat I_1, există o infinitate de termeni ai șirului s. Evident, $l(I_1) = \dfrac{b-a}{2}$ și fie $a_{i_1} \in I_1$ un termen al lui s. Împărțim I_1 în două subintervale închise de lungime egală $\left(\text{anume } \dfrac{b-a}{2^2}\right)$ și cel puțin unul, notat I_2, conține o infinitate de termeni din s și, ca atare, putem alege $a_{i_2} \in I_2$ cu $i_1 < i_2$. Repetînd procedeul, la pasul k alegem $a_{i_k} \in I_k$, astfel încît $i_{k-1} < i_k$. Notăm $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, $k \geqslant 0$. Atunci $a = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0 = b$ și $\beta_k - \alpha_k = \dfrac{b-a}{2^k}$. Așadar, șirurile $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$, $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ sînt monotone și mărginite, deci convergente, avînd aceeași limită c. Deoarece $\alpha_n \leqslant c \leqslant \beta_n$ și $\alpha_n \leqslant a_{i_n} \leqslant \beta_n$, rezultă $|a_{i_n} - c| \leqslant \beta_n - \alpha_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $\forall\, n \geqslant 0$. Atunci, cf. teoremei II.4, 1°, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_{i_n} = c$.

Lema lui Cesaró este demonstrată. Desigur, un șir mărginit poate să aibă mai multe subșiruri convergente.

Pentru fixarea noțiunilor anterioare este utilă o sinteză.

a) După proprietățile de mărginire, monotonie și convergență, șirurile se clasifică în:

- șiruri mărginite [exemple: $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, $\left(\dfrac{2^n}{2^n+1}\right)_{n\geqslant 0}$, $(\sin n)_{n\geqslant 0}$];
- șiruri nemărginite [exemple: $(2^n)_{n\geqslant 0}$, $\left(\dfrac{3^n}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$];

- șiruri monotone [exemple: $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$, $(n^2)_{n\geqslant 0}$, $(-3^{-n})_{n\geqslant 0}$];
- șiruri care nu sînt monotone [exemple: $((-2)^n)_{n\geqslant 0}$, $(\sin n)_{n\geqslant 0}$];

$\left\langle \begin{array}{l} \text{șiruri convergente sau echivalent, cu limita finită} \\ \qquad \left[\text{exemple: } \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1},\ \left(\frac{1}{10^n}\right)_{n\geqslant 0}\right]; \\ \text{șiruri divergente.} \end{array} \right.$

Șirurile divergente se împart în șiruri care nu au limită [exemple: $(1 + (-1)^n)_{n\geqslant 1}$, $\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)_{n\geqslant 1}$] și șiruri avînd limita infinită [exemple: $(2^n)_{n\geqslant 0}$, $(-2^n)_{n\geqslant 0}$].

b) Reținem, de asemenea, următoarele rezultate:
șir convergent $\Rightarrow$ șir mărginit (teorema II.3);
șir monoton și mărginit $\Rightarrow$ șir convergent (teorema II.5).

EXERCIȚII (capitolul II, § 1)

1. Să se arate că șirurile următoare sînt convergente către zero:

a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$;

b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, $n \geqslant 0$;

c) $a_n = \frac{3}{2^n+1}$, $n \geqslant 0$;

d) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$, $n \geqslant 0$;

e) $a_n = \frac{1}{n^2+n+1}$, $n \geqslant 0$;

f) $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geqslant 0$.

2. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 0$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{p \text{ ori } (p\geqslant 1 \text{ fixat})} = 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ ori}} = 1$.

Ce se poate spune despre $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$?

3. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n} = 4$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{n^2} = 2$, folosind definiția II.1.

4. Care din șirurile următoare sînt convergente:

a) $1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots, 1, 0, \frac{1}{2}, \ldots$;

b) $a_n = \frac{1}{n+2}$, $n \geqslant 3$;

c) $a_n = 2$, $n \geqslant 0$;

d) $a_n = 1 + (-1)^n$, $n \geqslant 0$;

e) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$, $n \geqslant 1$;

f) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{n+2}, \ldots$;

g) $a_n = \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$, $n \geqslant 0$;

h) $a_n = \frac{10^n+1}{10^n+2}$, $n \geqslant 0$?

5*. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un șir de numere reale și $a \in \mathbf{R}$; să se exprime cu ajutorul cuantificatorilor logici faptul că șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ nu converge către a.

6. Să se arate că șirul $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+4}$, $n \geqslant 0$ este monoton și mărginit; care este limita lui?

7. a) Fie $a_n = \dfrac{1}{n^2} + 0{,}002$, $n \geqslant 1$. Calculați a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; este adevărat că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

b) Este convergent șirul $a_n = (-1)^n + \dfrac{n+1}{n}$, $n \geqslant 1$?

8. Ce se poate spune despre un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$, în fiecare din cazurile următoare:

a) există $\varepsilon > 0$ real astfel încît $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant 0$?

b) pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice $n \geqslant 0$ avem $|a_n| < \varepsilon$?

c) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ natural astfel încît $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$?

9. Folosind teorema II.4 să se arate că

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n+1}{n+1} = 4$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sin\dfrac{n\pi}{3} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ $\left(\text{observînd că } 0 \leqslant \dfrac{n!}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n},\ \forall n \geqslant 1\right)$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 1) = \infty$.

10. Folosind teorema II.5, să se studieze convergența șirurilor:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+1},\quad a_n = \frac{2^n}{n!},\quad a_n = 1 - 3^{-n},\quad a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2},\quad n \geqslant 1.$$

11. Să se arate că dacă $a_n \to a$ în $\mathbf{R}$, atunci

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+2} - a_n) = 0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p(n)} = a$, pentru orice aplicație bijectivă $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

12. Să se figureze graficele șirurilor $a_n = \dfrac{3n+1}{n}$, $b_n = \dfrac{3n-2}{n}$, $c_n = \dfrac{3n + (-1)^n}{n}$, $(n \geqslant 1)$ și să se demonstreze că aceste șiruri converg către 3. Care dintre ele este monoton?

13. Să se arate că pentru orice număr real a există:

1°. un șir neconstant care converge către a;

2°. șiruri $b_n \to 0$, $c_n \to 0$ astfel încît $\dfrac{b_n}{c_n} \to a$.

14. Să se arate că următoarele șiruri au limita ∞: $(\sqrt{n})_{n\geqslant 1}$, $(2^{n-1})_{n\geqslant 1}$, $\left(\dfrac{n^2+4}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

15. Să se dea un exemplu de șir având limita $-\infty$, fără a fi monoton descrescător.

16. Să se arate că orice șir nemărginit de numere reale este divergent. Folosind acest fapt, arătați că șirurile $a_n = 2^n$, $b_n = (-2)^n$, $n \geqslant 0$ sînt divergente.

§ 2. Limita unei funcții într-un punct

2.1. Punerea problemei

În studiul unor funcții reale, inclusiv al celor care modelează procese fizice, este importantă cunoașterea comportării acelor funcții în vecinătatea anumitor puncte fixate. Mai precis, dacă $f : D \to \mathbf{R}\ (D \subset \mathbf{R})$ este o funcție reală de variabilă reală și dacă $x \in D$ este „apropiat" de o valoare α, ce se poate spune despre $f(x)$? de exemplu, dacă un șir $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de puncte din D converge către α, ce se poate spune despre convergența șirului $(f(x_n))_{n\geqslant 0}$? La astfel de întrebări se va răspunde în continuare, căutînd să precizăm sensul afirmației: dacă x se apropie de α, atunci $f(x)$ se apropie de l.

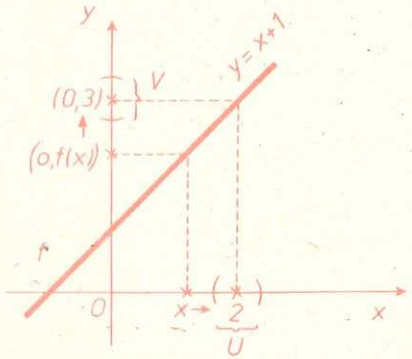


Fig. II.6

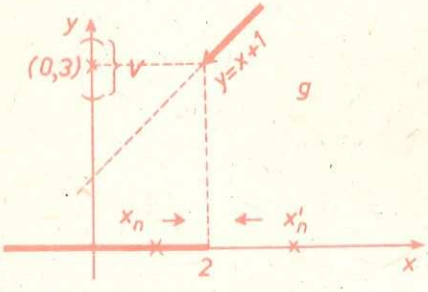


Fig. II.7

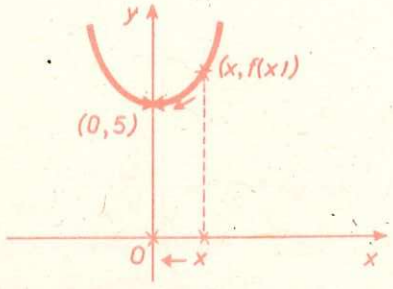


Fig. II.8

Exemple

1) Fie funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1$ și punctul $\alpha = 2$. Într-un sens intuitiv, încă neprecizat, se observă că dacă x este „apropiat" de 2, atunci $f(x) = x + 1$ este „apropiat" de 3; în sens mai precis, se observă că dacă x_n este un șir convergent către $\alpha = 2$, atunci șirul $f(x_n) = x_n + 1$ este convergent către 3. De asemenea, pentru orice interval $V = (3 - \varepsilon,\ 3 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, centrat în $y = 3$, există o vecinătate U a punctului $\alpha = 2$ astfel încît $\forall x \in U$ să rezulte $f(x) \in V$; anume, se poate lua $U = (2 - \varepsilon,\ 2 + \varepsilon)$ (fig. II.6).

2) Considerînd funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} \quad \text{(fig. II.7)}$$

și luînd șirul $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, care converge către 2, șirul $g(x_n) = 0$ converge către 0; pe de altă parte, luînd șirul $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, convergent către 2, șirul $g(x_n) = 3 + \dfrac{1}{n}$ converge către 3. Alegînd vecinătatea $V = (2, 4)$ a punctului 3, pentru orice vecinătate U a lui $\alpha = 2$, există puncte $x \in U$, $x < 2$, pentru care $f(x) \notin V$.

3) Considerăm funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{x}$ care nu este definită în punctul $x = 0$. Pentru orice șir $x_n \to 0$ $x_n \neq 0$, avem $f(x_n) = \dfrac{x_n^3 + 5x_n}{x_n} = x_n^2 + 5$, deci $f(x_n) \to 5$ (fig. II.8).

4) Pentru funcția $f_1 : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = \dfrac{1}{x+2}$, o idee asupra comportării și în vecinătatea punctului $x = -2$ se obține observînd tabloul de valori

x	-3	...	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$-2{,}0001$	...	-2	...	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}98$
$f_1(x)$	-1		-10^2	-10^3	-10^4	$\searrow$	$\searrow$	$\vdots$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	10^3	10^2	50

Dacă x „se apropie" de -2 prin valori strict mai mici (respectiv mai mari) decît -2, atunci valorile lui $f_1(x)$ descresc (respectiv cresc). În mod similar, pentru funcția $g_1 : \mathbf{R}\setminus\{-2\} \to \mathbf{R}$, $g_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, se poate alcătui un tablou de valori de forma:

x	-3	...	$-2{,}01$	$-2{,}001$	$-2{,}0001$	...	-2	...	$-1{,}999$	$-1{,}99$	$-1{,}98$
$g_1(x)$	1		10^4	10^6	10^8	$\nearrow$	$\nearrow$	$\vdots$	$\nwarrow$	$\nwarrow$	10^6	10^4	2500

care dă o idee asupra comportării lui g_1 în vecinătatea punctului -2.

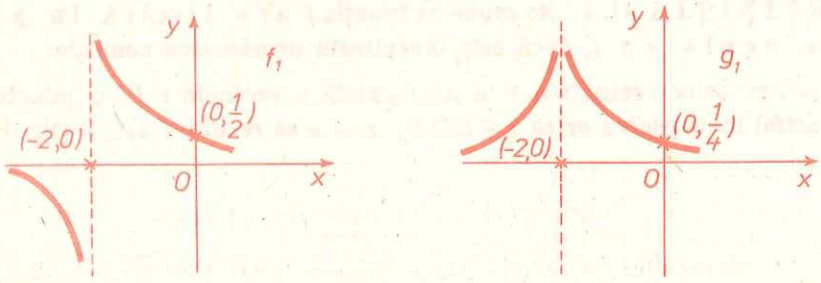


Fig. II.9

5) Considerăm punctul $x = 0$ și funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x < 0 \\ 3 & , \text{ dacă } x = 0 \\ -x^2, & \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$$

al cărei grafic este indicat în figura II.10. În acest caz, pentru orice șir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, rezultă că $f(x_n) \to 0$. Apoi pentru orice șir $x_n \to \infty$, avem $f(x_n) \to -\infty$.

6) Funcția $f : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ are proprietatea că pentru orice șir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$, avem $f(x_n) \to 0$; într-adevăr, $|f(x_n)| \leqslant |x_n|$ pentru orice n și aplicăm teorema II.4, 1°, pentru $l = 0$, $a_n = f(x_n)$, $b_n = |x_n|$.

Se observă că în exemplele 1, 2 funcțiile au fost definite în punctul $x = 2$; în exemplul 3 funcția f nu a fost definită în $x = 0$, iar în exemplul 4 funcțiile f_1, g_1 nu au fost definite în punctul $x = -2$, în vecinătatea căruia ne-am situat. Se mai observă că în exemplele 1, 3, 5, 6, dacă x „este apropiat" de punctul α respectiv, atunci $f(x)$ „se apropie" de un punct l bine determinat.

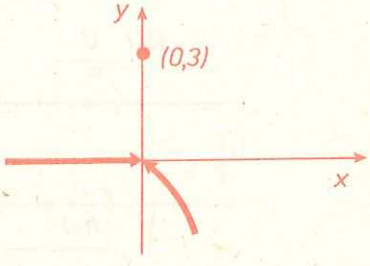


Fig. II.10

În fiecare din aceste exemple s-au considerat o funcție $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ și un

punct α care poate să nu aparţină lui D dar este punct de acumulare pentru D. Remarcăm că în acest caz *există şiruri de puncte din* $D \setminus \{\alpha\}$ *care converg către* α; într-adevăr, dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $n \geqslant 1$ natural, în vecinătatea $\left(\alpha - \frac{1}{n}, \alpha + \frac{1}{n}\right)$ a punctului α se află cel puţin un punct $x_n \in D$, $x_n \neq \alpha$, deci $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ şi, ca atare, $x_n \to \alpha$. Dacă $\alpha = \infty$, alegem $x_n \in D$, $x_n > n$ şi $x_n \to \infty$ etc.

Trecem acum la definiţia noţiunii de limită a unei funcţii într-un punct.

2.2. Limita unei funcţii într-un punct

Fixăm o funcţie $f : D \to \mathbb{R} (D \subset \mathbb{R})$, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un punct de acumulare pentru D şi un punct $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

DEFINIŢIA II.4. Se spune că funcţia f are limită în punctul α, egală cu l, dacă este îndeplinită următoarea condiţie:

(4) **pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a punctului α astfel încît pentru orice $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $f(x) \in V$ (fig. II.11).**

În acest caz se scrie

$$\lim_{x \to \alpha,\ x \in D} f(x) = l \text{ sau } \lim_{x \to \alpha} f(x) = l$$

şi se citeşte: limita lui $f(x)$, cînd x tinde către α există şi este egală cu l.

Atenţie! Nu am dat un sens pentru $x \to \alpha$ sau $f(x) \to l$, luate separat, ci numai pentru sintagma $\{x \to \alpha \Rightarrow f(x) \to l\}$, echivalentă cu $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Condiţia (4) exprimă faptul că pentru orice x „suficient de apropiat" de α, $f(x)$ este „oricît de apropiat" de l. **Dacă există, limita unei funcţii într-un punct este unică:** dacă $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l$ şi $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = l'$ şi dacă prin absurd $l \neq l'$, atunci alegem vecinătăţi disjuncte V şi V' ale punctelor l, l' respectiv şi există vecinătăţi U şi U' ale lui α satisfăcînd condiţii de tipul (4). Atunci, pentru $x \in D \cap U \cap U'$, $x \neq \alpha$, rezultă $f(x) \in V \cap V'$, ceea ce este absurd.

Stabilim acum un rezultat important care este şi un criteriu practic de studiu al existenţei limitei unei funcţii, după care vom analiza cîteva exemple.

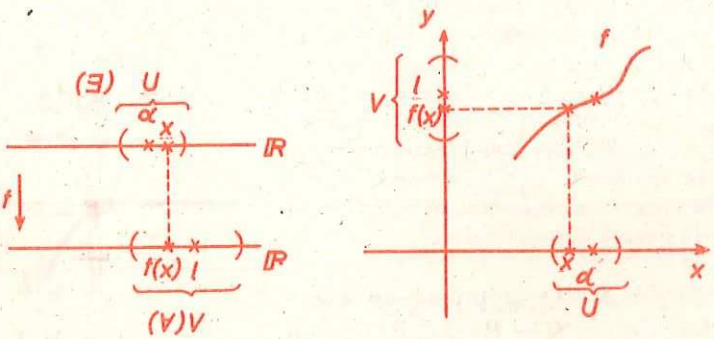


Fig. II.11

TEOREMA II. 6. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ o funcție, $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D și $l \in \overline{\mathbf{R}}$. Sînt echivalente afirmațiile:

(a) limita $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ există și este egală cu l („criteriul cu vecinătăți");

(b) pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0}$ de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$ avînd limita α avem $f(x_n) \to l$ („criteriul cu șiruri").

Demonstrație. (a) $\Rightarrow$ (b). Presupunem că există $l = \lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ și fie $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, $\forall\, n \geq 0$. Avem de demonstrat că $f(x_n) \to l$. Pentru aceasta folosim definiția II.2 și fie V o vecinătate *oarecare* a punctului l. Conform ipotezei, există o vecinătate U a lui α astfel încît din faptul că $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $f(x) \in V$. Deoarece $x_n \to \alpha$, rezultă că $x_n \in U$ de la un rang N încolo; atunci $x_n \in D \cap U$, $x_n \neq \alpha$, deci $f(x_n) \in V$ pentru orice $n \geq N$, deci $f(x_n) \to l$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Facem ipoteza că este îndeplinită condiția (b) și avem de verificat condiția (4). Presupunem, prin reducere la absurd, că această condiție nu este îndeplinită, deci că ar *exista* o vecinătate V a punctului l astfel încît pentru orice vecinătate U a punctului α să existe un punct $x \in D \cap U$, $x \neq \alpha$ cu proprietatea că $f(x) \notin V$.

Presupunem mai întîi $\alpha \in \mathbf{R}$ și luăm $U = \left(\alpha - \frac{1}{n},\ \alpha + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ fiind întreg arbitrar. Atunci pentru fiecare $n \geq 1$ există $x_n \in D \cap U$, $x_n \neq \alpha$ astfel încît $f(x_n) \notin V$. Deoarece $x_n \in U$, avem $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, deci $x_n \to \alpha$ și conform ipotezei (b), rezultă $f(x_n) \to l$, ceea ce contrazice faptul că $f(x_n) \notin V$ pentru orice n. Am ajuns astfel la o contradicție.

Dacă $\alpha = \infty$, atunci luăm $U = (n, \infty]$, $n \geq 1$ fiind întreg arbitrar și există $x_n \in D \cap U$ astfel încît $f(x_n) \notin V$. Cum $x_n \in U$, rezultă $x_n > n$, $\forall\, n \geq 1$, deci $x_n \to \infty$ și conform ipotezei (b) rezultă $f(x_n) \to l$, ceea ce contravine faptului că $f(x_n) \notin V$ pentru orice n. Dacă $\alpha = -\infty$ se raționează similar considerînd $U = [-\infty, -n)$ etc.

Observație importantă. Pentru studiul existenței limitei unei funcții într-un punct se folosește adeseori condiția (b), care ar putea fi luată ca definiție. Negația logică a condiției (b) dă un criteriu ca o funcție f să *nu* aibă limita l în punctul α, anume: să existe un șir $x_n \to \alpha$, $x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, $n \geq 0$ astfel încît șirul $(f(x_n))_{n \geq 0}$ să nu aibă limita l. Astfel, dacă se pot construi două șiruri $x'_n \to \alpha$, $x''_n \to \alpha$ de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$ și dacă unul din șirurile $(f(x'_n))_{n \geq 0}$, $(f(x''_n))_{n \geq 0}$ nu are limită sau dacă ambele au limite, dar acestea sînt distincte, atunci funcția f nu are limită în punctul α.

Noțiunea introdusă mai sus generalizează noțiunea de limită a unui șir. Fie $l \in \overline{\mathbf{R}}$; direct din definiție rezultă că un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita l dacă și numai dacă funcția $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = a_n$ are limita l (în punctul $\alpha = \infty$, care este punct de acumulare pentru $\mathbf{N}$).

Alături de utilitatea șirurilor în procese algoritmice recurente, în legătură cu raționamentele prin inducție etc., subliniată în § 1, teorema II.6 arată că studiul limitelor de funcții se poate reduce la studiul șirurilor, acestea din urmă fiind — după cum știm — funcții definite pe o mulțime cu un singur punct de acumulare.

Exemple

1) Reluăm toate cele 6 exemple de la punctul 2.1. Este evident că $\lim_{x\to 2}(x+1)=3$, deoarece pentru orice şir $x_n\to 2$, $x_n\neq 2$ avem $x_n+1\to 3$ şi aplicăm teorema II.6. Apoi funcţia g din exemplul 2 nu are limită în punctul $x=2$, deoarece alegînd şirurile $x_n=2-\frac{1}{n}$, $x'_n=2+\frac{1}{n}$, $n\geqslant 1$, ambele convergente către 2, avem $g(x_n)\to 0$ şi $g(x'_n)=3+\frac{1}{n}\to 3$. Pentru exemplul 3 avem evident $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+5x}{x}=5$ (aplicînd criteriul cu şiruri).

Apoi $\lim_{x\to -2} f_1(x)$ nu există [deoarece pentru şirurile $x'_n=-2-\frac{1}{n}$, $x''_n=-2+\frac{1}{n}$, $n\geqslant 1$ avem $f_1(x'_n)=-n\to-\infty$ şi $f_1(x''_n)=n\to\infty$]. Dar $\lim_{x\to -2} g_1(x)=\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)^2}=$ $=\infty$ [deoarece pentru orice vecinătate V a punctului ∞ există $b>0$ astfel încît $(b,\infty]\subset V$ şi considerăm $U=\left(-2-\frac{1}{\sqrt{b}},\ -2+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$; se observă că U este vecinătate a punctului $x=-2$ şi, în plus, $\forall x\in U$, $x\neq -2$ avem $|x+2|<\frac{1}{\sqrt{b}}\Rightarrow$ $\Rightarrow (x+2)^2<\frac{1}{b}$, deci $\frac{1}{(x+2)^2}>b$, adică $\frac{1}{(x+2)^2}\in V$].

În exemplul 5 avem $\lim_{x\to 0} f(x)=0$; într-adevăr, aplicăm definiţia II.4 şi fie V o vecinătate oarecare a originii. Alegem $\varepsilon>0$ astfel încît $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset V$ şi fie $U=(-\sqrt{\varepsilon},\sqrt{\varepsilon})$. Dacă $x\in U$, $x\neq 0$, atunci $f(x)=0$, dacă $x<0$ şi $f(x)=-x^2$, dacă $x>0$, deci în orice caz $f(x)\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, adică $f(x)\in V$. Se poate remarca aici că $f(0)=3$, deci limita $\lim_{x\to 0} f(x)$ există şi diferă de $f(0)$. În fine, în exemplul 6 am probat deja că $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

La aceste exemple adăugăm alte trei exemple simple.

2) Orice funcţie constantă $f:D\to\mathbb{R}$ cu valoarea c are limită în orice punct α de acumulare pentru D şi $\lim_{x\to\alpha} f(x)=c$.

3) Este evident că $\lim_{x\to\alpha} x=\alpha$ (adică $\lim_{x\to\alpha} 1_{\mathbb{R}}(x)=\alpha$). Apoi, $\lim_{x\to\alpha} x^2=\alpha^2$ (deoarece dacă $x_n\to\alpha$, atunci $x_n^2\to\alpha^2$).

4) Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$ nu are limită în punctul ∞ deoarece şirurile $x'_n=n\pi$, $x''_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$, $n\geqslant 1$ au limita ∞ ($x'_n>n$ şi $x''_n>n$ pentru orice întreg $n\geqslant 1$), dar $f(x'_n)=\sin x'_n=\sin n\pi=0$, $f(x''_n)=\sin x''_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$, deci $f(x'_n)\to 0$, $f(x''_n)\to 1$.

În mod similar, arătăm că funcţia $g:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x=0$; anume alegem şirurile $x'_n=\frac{1}{n\pi}$ şi $x''_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$, $n\geqslant 1$ care converg către zero şi totuşi $f(x'_n)=\sin\frac{1}{x'_n}=\sin n\pi\to 0$, $f(x''_n)=\sin\frac{1}{x''_n}\to 1$.

Subliniem un fapt important. Se poate arăta că în cazul cînd $\alpha \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, afirmațiile (a), (b) din teorema II.6 sînt echivalente cu următoarea:

(c) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ depinzînd de ε astfel încît din faptul că $x \in D \setminus \{\alpha\}$ și $|x - \alpha| < \delta$ să rezulte $|f(x) - l| < \varepsilon$* („criteriul $\varepsilon - \delta$").

2.3. Limite laterale

Indicăm acum un nou criteriu care asigură existența limitei unei funcții într-un punct, adeseori utilizat.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$, α un punct de acumulare pentru mulțimea $D_1 = D \cap (-\infty, \alpha) = \{x \in D \mid x < \alpha\}$ și $l_s \in \mathbb{R}$. Se spune că funcția f *are limită (sau există limita lui f) la stînga* la punctul $x = \alpha$, egală cu l_s, dacă restricția lui f la D_1 are limită în punctul $x = \alpha$, conform definiției II.4. Se scrie atunci

$$\lim_{x \to \alpha,\ x < \alpha} f(x) = l_s \text{ sau simbolic } f(\alpha - 0) = l_s.$$

Aceasta revine la faptul că pentru orice vecinătate V a punctului l_s există o vecinătate U a lui α, astfel încît $x \in D \cap U$, $x < \alpha \Rightarrow f(x) \in V$.

În mod similar se definește *limita la dreapta* a lui f în punctul α, $l_d = \lim_{x \to \alpha,\ x > \alpha} f(x)$, $(l_d \in \overline{\mathbb{R}})$, notată simbolic $f(\alpha + 0)$. Uneori se notează $l_s = \lim_{x \uparrow \alpha} f(x)$ și $l_d = \lim_{x \downarrow \alpha} f(x)$. Se extinde direct teorema II.6 pentru limitele laterale (adică la stînga, respectiv la dreapta), folosind șiruri $x_n \to \alpha$, $x_n < \alpha$ (respectiv $x_n \to \alpha$, $x_n > \alpha$).

TEOREMA II.7. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și $\alpha \in \mathbb{R}$ un punct de acumulare pentru D cu proprietatea că funcția f are limite laterale în punctul $x = \alpha$ (adică există $f(\alpha - 0)$ și $f(\alpha + 0)$). Atunci afirmațiile următoare sînt echivalente:

1°. funcția f are limită în punctul $x = \alpha$;

2°. $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$.

În aceste condiții este adevărată următoarea dublă egalitate

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0).$$

Demonstrație. 1° $\Rightarrow$ 2°. Dacă există $l = \lim_{x \to \alpha} f(x)$, atunci este evident că $f(\alpha - 0) = l$ și $f(\alpha + 0) = l$, deci $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0) = l$.

2° $\Rightarrow$ 1°. Presupunem că $f(\alpha - 0) = f(\alpha + 0)$ și notăm cu l valoarea comună. Arătăm că limita $\lim_{x \to \alpha} f(x)$ există și este egală cu l. Fie V o vecinătate oarecare a lui l. Atunci există vecinătăți U_1, U_2 ale lui α, astfel încît pentru orice $u \in U_1 \cap D$, $u < \alpha$ să avem $f(u) \in V$ și pentru orice $v \in U_2 \cap D$, $v > \alpha$ să avem $f(v) \in V$. Considerăm vecinătatea $U = U_1 \cap U_2$ a punctului α. Pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq \alpha$ avem fie $x < \alpha$, $x \in U_1$, deci $f(x) \in V$, fie $x > \alpha$, $x \in U_2$ și din nou $f(x) \in V$. Așadar, am probat îndeplinirea condiției (4) și, ca atare, $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$.

Exemple

1) Treapta unitate are în origine limită la stînga, egală cu 0 şi limită la dreapta, egală cu 1.

2) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = [x]$. Ea are limită în orice punct $\alpha \notin \mathbf{Z}$, egală cu $[\alpha]$, iar în punctele $\alpha \in \mathbf{Z}$ are limite laterale neegale (fig. II.12); anume $f(\alpha - 0) = \alpha - 1$ şi $f(\alpha + 0) = \alpha$.

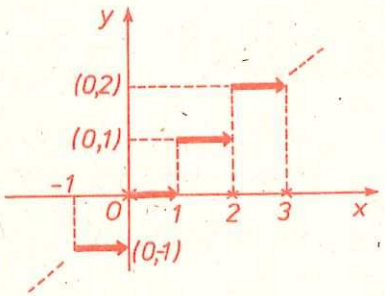


Fig. II.12

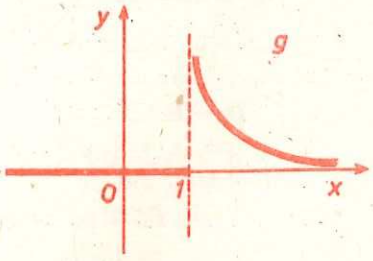


Fig. II.13

3) Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ are limită la dreapta, egală cu 0 în punctul $x = 0$ (şi nu are sens problema existenţei limitei la stînga în acel punct).

4) Funcţia $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & , \text{ dacă } x > 1 \end{cases} \quad \text{(fig. II.13)}$$

are limită la stînga în punctul $x = 1$ şi anume $g(1 - 0) = 0$, dar nu are limită finită la dreapta în acest punct; anume avem $g(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{x-1} = \infty$.

5) Iată un exemplu din fizică. Se consideră o cantitate de apă şi se notează cu $V(t)$ volumul ei la temperatura t. Atunci limita la stînga $V(0 - 0)$ este volumul aceleiaşi cantităţi de gheaţă la 0°, iar limita la dreapta $V(0 + 0)$ este volumul cantităţii de apă lichidă la 0°. Din considerente fizice, se ştie că

$$V(0 + 0) < V(0 - 0) \text{ (fig. II.14)}$$

(acesta este un motiv pentru care se întîmplă accidente la îngheţarea apei în conducte!).

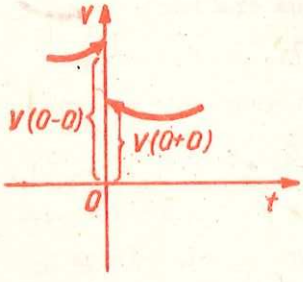


Fig. II.14

În general, dacă o funcţie $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) admite limite laterale într-un punct α (care este punct de acumulare pentru D), atunci se poate defini *saltul funcţiei* f *în punctul* α. Acesta este numărul real

$$S_{f,\alpha} = f(\alpha + 0) - f(\alpha - 0),$$

adică diferenţa între limita la dreapta şi limita la stînga ale lui f în punctul α.

De exemplu, în cazul funcţiei $f(x) = x$ saltul este nul în orice punct din $\mathbf{R}$; saltul funcţiei $f(x) = [x]$ este egal cu zero în orice punct $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ şi este egal cu 1 în orice punct $\alpha \in \mathbf{Z}$. Se observă că în exemplul din fizică, dat anterior, saltul lui V în origine este negativ.

EXERCIȚII (capitolul II. § 2)

1. Să se arate că funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare au limită în orice punct $\alpha \in \mathbf{R}$:
a) $f(x) = x + 5$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = x^2 + 5$.

2. Să se determine punctele unde funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2x - 2}$ nu are limită. Aceeași problemă pentru $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$.

3. Să se arate că limitele următoare există și au valorile indicate:
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 1}{x + 2} = \dfrac{2}{3}$; b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 5}{x + 3} = -1$,
aplicînd definiția II.4.

4. Să se arate că funcțiile $f,\ g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x}$, $g(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$ nu au limită în punctul $x = 0$, dar $f - g$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$ au limită în acest punct.

5. Să se arate, folosind definiția II.4, că
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x - 1)^2} = \infty$;
b) funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ nu are limită în punctul $x = 1$.

6. Să se schițeze graficele funcțiilor $f,\ g,\ h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f(x) = 2x + 1,\ g(x) = 3x - 1,\ h(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 3x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

și să se determine punctele unde aceste funcții nu au limită.

7. Să se traseze graficele funcțiilor $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ și $h : \mathbf{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Care din aceste funcții nu au limită în punctele $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$?

8. Să se calculeze limitele laterale ale funcțiilor $f : D \to \mathbf{R}$ următoare în punctele indicate (D fiind domeniul maxim de definiție):
a) $f(x) = x + |x|$, $\alpha = 0$, b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $\alpha = 0$;
c) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x}$, $\alpha = 0$; d) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x, & \text{dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$, $\alpha = 1$;
e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 40, & \text{dacă } x \leqslant 7 \\ x + 2, & \text{dacă } x > 7 \end{cases}$, $\alpha = 7$; f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $\alpha = 2$.

9. Pentru ce k real funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & \text{dacă } x < 1 \\ x - 2, & \text{dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$$

are limită în punctul $x = 1$? Aceeași problemă pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx, & \text{dacă } x < 0 \\ x - 2, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}, \text{ în } \alpha = 0.$$

10. Să se calculeze saltul funcțiilor: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare în punctele indicate:
a) $f(x) = x^2$, în $\alpha = 1$;
b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{dacă } x < 2 \\ 4x, & \text{dacă } x \geqslant 2 \end{cases}$, în $\alpha = 2$;
c) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 1 \\ kx + 2, & \text{dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$, ($k$ parametru real), în $\alpha = 1$.

§ 3. Operații cu șiruri convergente

Pentru studiul operațiilor cu limite de funcții începem cu cazul particular al șirurilor. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$, două șiruri de numere reale. Se pot atunci considera alte șiruri definite cu ajutorul lor; de exemplu, $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$, $(2a_n)_{n\geq 0}$, $(3a_n + 5b_n)_{n\geq 0}$, $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ etc. Ce se poate spune despre convergența acestora dacă șirurile inițiale sînt convergente? Răspunsul la o astfel de întrebare este util, de exemplu, în reducerea studiului șirurilor la anumite șiruri-tip; astfel, pentru șirul $c_n = \frac{2n+1}{n^2}$, $n \geq 1$, avem $c_n = 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, iar pentru șirul $d_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{n}$, $n \geq 1$, avem $d_n = \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{1}{n^2}}$ pentru orice $n \geq 1$.

Vom folosi următoarea propoziție pregătitoare.

LEMĂ. Dacă $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$ sînt două șiruri convergente către zero, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ avem $\alpha u_n + \beta v_n \to 0$.

Demonstrație. Putem presupune $\alpha \neq 0$ și $\beta \neq 0$, celelalte cazuri fiind imediate. Verificăm condiția (2) și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Conform ipotezei, există N_1, N_2 astfel încît $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ pentru orice $n \geq N_1$ și $|v_n| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$ pentru orice $n \geq N_2$. Fie $N = \max(N_1, N_2)$. Atunci pentru orice $n \geq N$, avem $|\alpha u_n + \beta v_n| \leq |\alpha u_n| + |\beta v_n| = |\alpha| \cdot |u_n| + |\beta| \cdot |v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = 0$.

TEOREMA II.8. Presupunem că șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sînt convergente. Atunci șirurile $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$, $(a_n b_n)_{n\geq 0}$ sînt convergente și, în plus,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

Demonstrație. Fie $a_n \to a$, $b_n \to b$, deci șirurile $u_n = |a_n - a|$, $v_n = |b_n - b|$, $n \geq 0$ converg către zero. Avem, pentru orice $n \geq 0$, $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| = u_n + v_n$. Conform lemei, avem $u_n + v_n \to 0$. Aplicînd teorema II.4, 1°, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, adică relația (5).

Șirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este mărginit (fiind convergent), deci există $M > 0$ astfel încît $|b_n| \leq M$, $\forall n \geq 0$. Din relația $a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$, rezultă $|a_n b_n - ab| \leq c_n$, unde $c_n = M \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| = Mu_n + |a| v_n$, pentru orice $n \geq 0$. Conform lemei, avem $c_n \to 0$ și, aplicînd teorema II.4, 1°, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

COROLAR. 1°. **Dacă** $\lambda \in \mathbf{R}$ **și** $a_n \to a$, $a \in \mathbf{R}$, *atunci* $\lambda a_n \to \lambda a$, **în particular,** $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -a$.

2°. **Dacă șirurile** $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ **sînt convergente, atunci șirul** $(a_n - b_n)_{n\geqslant 0}$ **este convergent și** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Demonstrație. 1°. Șirul constant $b_n = \lambda$, $n \geqslant 0$ este convergent către λ și, aplicînd relația (6), avem $\lambda a_n \to \lambda a$. Pentru $\lambda = -1$ rezultă $-a_n \to -a$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}[a_n + (-b_n)] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Pe scurt, dar mai puțin riguros, teorema II.8 și corolarul precedent se exprimă spunînd că limita sumei (diferenței, produsului) de șiruri convergente este egală cu suma (respectiv diferența, produsul) limitelor, iar constantele pot fi „scoase" în afara limitei.

Trebuie observat că lema și relațiile (5), (6) din teorema II.8 au loc pentru orice număr fixat $k (k \geqslant 2)$ de șiruri convergente, considerînd în lema corespunzătoare rangul $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Aceasta nu este posibilă dacă numărul șirurilor crește indefinit; de exemplu, deși $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, totuși limita $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n \text{ ori}}\right)$ nu este nulă, ci este evident egală cu 1.

TEOREMA II. 9. **Fie** $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ **două șiruri de numere reale.**

1°. **Presupunem că** $a_n \to \infty$ **și** $b_n \to b$, $b \in \mathbf{R}$. **Atunci** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$.

2°. **Presupunem că** $a_n \to -\infty$ **și** $b_n \to b$, $b \in \mathbf{R}$. **Atunci** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ \infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$.

3°. **Dacă** $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

4°. **Dacă** $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$ **și** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$.

5°. **Dacă** $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, **atunci** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

Demonstrație 1°. Presupunem $a_n \to \infty$, $b_n \to b$ și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Aplicăm teorema II.2. Există un rang N_1, astfel încît $a_n > 2\varepsilon - b$ pentru orice $n \geqslant N_1$ și un rang N_2, astfel încît $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N_2$. Atunci pentru orice $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, avem $a_n + b_n > (2\varepsilon - b) + (b - \varepsilon) = \varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

Presupunem acum că $b > 0$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ avem $a_n > \frac{2\varepsilon}{b}$ și $b_n \in \left(\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right)$ de la un rang încolo, deci $a_n b_n > \frac{2\varepsilon}{b} \cdot \frac{b}{2} = \varepsilon$, adică $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$; dacă $b < 0$, atunci $-b > 0$ și $-b_n \to -b$, deci, conform cazului precedent, $\lim_{n\to\infty} (-a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n(-b_n) = \infty$, de unde, $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = -\infty$.

Afirmația 2 se probează similar. Demonstrăm 3°: fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci $a_n > \frac{\varepsilon}{2}$, $b_n > \frac{\varepsilon}{2}$ de la un rang încolo, deci $a_n + b_n > \varepsilon$ de la un rang încolo, deci $a_n + b_n \to \infty$. În mod analog, $a_n > \sqrt{\varepsilon}$, $b_n > \sqrt{\varepsilon}$ de la un rang încolo, deci $a_n b_n > \varepsilon$ adică $a_n b_n \to \infty$.

Celelalte afirmații se demonstrează în mod similar.

Observație. Afirmațiile din teorema II.9 se scriu simbolic respectiv astfel:

1°. $\infty + b = \infty$, $\infty \cdot b = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } b > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$

2°. $-\infty + b = -\infty$, $(-\infty)\cdot b = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } b > 0 \\ \infty, & \text{dacă } b < 0 \end{cases}$

3°. $\infty + \infty = \infty$, $\infty \cdot \infty = \infty$

4°. $-\infty - \infty = -\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$

5°. $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

Nu se atribuie nici un sens pentru $\infty + (-\infty)$, $\infty \cdot 0$, considerate cazuri exceptate. Remarcăm, de asemenea, că $-(-\infty) = \infty$, în sensul că un șir $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă și numai dacă șirul $(-a_n)_{n\geq 0}$ are limita ∞.

TEOREMA II.10. Fie $(b_n)_{n\geq 0}$ un șir de numere reale.

1°. Dacă $(b_n)_{n\geq 0}$ este un șir convergent către numărul real b și $b \neq 0$, atunci numerele b_n sînt nenule începînd de la un anumit rang k și șirul $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq k}$ converge către $\frac{1}{b}$, adică $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

2°. Dacă $b_n \to \infty$ (sau dacă $b_n \to -\infty$), atunci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

3°. Presupunem că $b_n \to 0$. Dacă $b_n > 0$ (respectiv $b_n < 0$) de la un anumit rang, atunci $\frac{1}{b_n} \to \infty$ $\left(\text{respectiv } \frac{1}{b_n} \to -\infty\right)$.

Demonstrație. 1°. Presupunem $b > 0$ (cazul $b < 0$ se tratează similar) și alegem o vecinătate $V = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ a lui b, care nu conține originea. Deoarece $b_n \to b$, toți termenii b_n vor fi situați în V de la un rang k încolo și, în particular, $b_n > b - \varepsilon > 0$ pentru orice $n \geq k$. Atunci pentru orice $n \geq k$,

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{1}{(b-\varepsilon)\cdot b} \cdot |b_n - b|$$

și, cum $b_n \to b$, va rezulta $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$, aplicînd teorema II.4, 1°.

2° Presupunem că $b_n \to \infty$ și fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Atunci există un rang N astfel încît $b_n > \frac{1}{\varepsilon}$ pentru orice $n \geqslant N$. În particular, $b_n > 0$ și $0 < \frac{1}{b_n} < \varepsilon$ pentru orice $n \geqslant N$, deci $\frac{1}{b_n} \to 0$. Apoi, dacă $b_n \to -\infty$, atunci $-b_n \to \infty$ și $\frac{1}{-b_n} \to 0$, deci $\frac{1}{b_n} \to 0$.

3° Presupunem că $b_n \to 0$ și $b_n > 0$ pentru orice $n \geqslant k$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există N astfel încît $\forall\, n \geqslant \max(N, k)$ să avem $0 < b_n < \frac{1}{\varepsilon}$, deci $\frac{1}{b_n} > \varepsilon$ și, ca atare, $\frac{1}{b_n} \to \infty$. În fine, dacă $b_n \to 0$ și $b_n < 0$ (pentru $n \geqslant k$), atunci $-b_n \to 0$ și $-b_n > 0$ pentru $n \geqslant k$, deci $\frac{1}{-b_n} \to \infty$, adică $\frac{1}{b_n} \to -\infty$.

COROLAR. Dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ și $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt șiruri convergente și dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, atunci șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant k}$ este convergent și, în plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}. \tag{7}$$

Demonstrație. Avem $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ și aplicăm relația (6) din teorema II.8 și teorema II.10, 1°.

Observație. Afirmațiile 2°, 3° din teorema II.10 se scriu simbolic astfel:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0,$$

$$\frac{1}{+0} = \infty, \qquad \frac{1}{-0} = -\infty,$$

dar sensul corect al acestora este cel dat în enunțul teoremei.

Nu se definesc $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, și $\infty \cdot 0$, numite cazuri exceptate (sau „nedeterminări"). Un motiv pentru care expresiei $\frac{0}{0}$ nu i se poate atribui un sens este următorul: dacă $a_n \to 0$ și $b_n \to 0$, atunci nu se poate trage nici o concluzie privind limita raportului $\frac{a_n}{b_n}$. Astfel, pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{2}{n}$ $(n \geqslant 1)$ avem $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{1}{2}$; pentru $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$ avem $\frac{a_n}{b_n} \to \infty$, în fine, pentru $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \geqslant 1)$ avem, de asemenea, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ și raportul $\frac{a_n}{b_n} = (-1)^n$ nu are limită. Aceasta arată că, spre deosebire de cazurile anterioare, nu putem avea nici o concluzie generală.

Expresia $\frac{0}{0}$ simbolizează orice raport $\frac{a_n}{b_n}$ a două șiruri care converg către zero. În mod analog, $\infty - \infty$ simbolizează diferența $a_n - b_n$ a două șiruri $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ și se consideră caz exceptat, deoarece dacă $a_n \to \infty$ și $b_n \to \infty$ nu putem trage nici o concluzie referitor la limita diferenței $a_n - b_n$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} (2n - n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (n - 2n) = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} [(n+2) - n] = 2$ etc. O discuție similară are loc pentru $\frac{\infty}{\infty}$ și pentru $\infty \cdot 0$.

Exemple

1) Calculăm limita $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$. Notăm $a_n = \frac{2}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$ și observăm că $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Atunci șirul $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și $l = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0$.

2) Studiem existența limitei șirului $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, $n \geqslant 0$. El este evident mărginit ($0 < a_n < 1$, pentru orice $n \geqslant 0$) și monoton crescător, deci este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Deoarece $a_n \geqslant 0$ și $l = \sup\limits_n a_n$, rezultă $l \geqslant 0$. Avem $a_n^2 = \frac{n^2}{n^2+1}$ și $\lim\limits_{n\to 0} a_n^2 = 1$, deci $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2 = 1$, $l^2 = 1$, de unde $l = 1$ (deoarece $l \geqslant 0$).

3) Avem $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+2n) = \infty$, aplicînd teorema II.9,3°. De asemenea, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty$ dar aici justificarea este diferită: avem $n^2 - 2n = n^2\left(1 - \frac{2}{n}\right) = a_n b_n$, unde $a_n = n^2$, $b_n = 1 - \frac{2}{n}$, $n \geqslant 1$. Deoarece $a_n \to \infty$, $b_n \to 1$, atunci, aplicînd teorema II.9, 1°, rezultă $a_n b_n \to \infty$, adică $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty$.

În mod similar, aplicînd teorema II.9, punctele 4° și 2°, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 - 2n) = -\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2 + 2n) = -\infty$. De asemenea, se poate folosi faptul că dacă un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită, atunci $(-a_n)_{n\geqslant 0}$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = -\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4) Aplicînd teorema II.10, 2°, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2-2n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{-n^2-2n} = 0$.

Stabilim un alt rezultat important, care se enunță, pe scurt, spunînd că „inegalitățile se păstrează prin trecere la limită".

TEOREMA II.11. Dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ și $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt șiruri de numere reale avînd limită și dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \geqslant N$ (N fiind un număr natural fixat), atunci

$$\lim_{n\to\infty} a \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{8}$$

Demonstrație. Fie $a_n \to a$, $b_n \to b$ (în $\overline{\mathbf{R}}$). Avem de arătat că $a \leqslant b$. Dacă, prin absurd, am avea $b < a$, atunci este ușor de văzut că există vecinătăți disjuncte V_1, V_2 ale punctelor b și respectiv a, astfel încît $x < y$ pentru orice $x \in V_1$, $y \in V_2$ (fig. II.15). Deoarece $b_n \to b$, termenii șirului $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sînt situați în V_1 de la un rang N_1 încolo și, similar, $a_n \in V_2$ pentru orice $n \geqslant N_2$, cu N_2 convenabil. Notăm $M = \max(N, N_1, N_2)$. Dacă $n \geqslant M$, atunci rezultă $n \geqslant N_1$, $n \geqslant N_2$, deci $a_n \in V_2$ și $b_n \in V_1$, deci $b_n < a_n$. Pe de altă parte, deoarece $n \geqslant M$, rezultă $n \geqslant N$, deci $a_n \leqslant b_n$ și se ajunge la o contradicție.

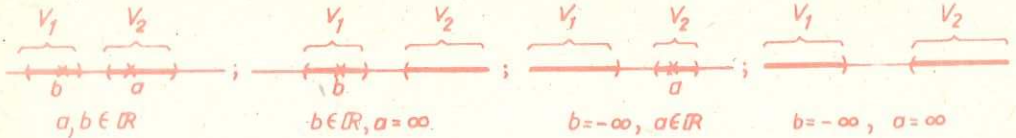


Fig. II.15

Observație. Dacă în enunțul teoremei II.11 se presupune $a_n < b_n$ pentru orice $n \geqslant N$, atunci la limită se obține tot inegalitatea (8), nestrictă și nu o inegalitate strictă $\left(\text{de exemplu, avem } \frac{1}{n} < \frac{2}{n} \text{ pentru orice } n \geqslant 1 \text{ și totuși } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\right)$.

TEOREMA II. 12 („a cleștelui"). Presupunem că $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$, $(c_n)_{n\geqslant 0}$ sînt trei șiruri de numere reale astfel încît $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ pentru orice $n \geqslant N$ (N fiind un rang fixat). Dacă $a_n \to l$, $c_n \to l$, atunci șirul $(b_n)_{n\geqslant 0}$ are limită și aceasta este egală cu l.

Demonstrație. Presupunem că $l \in \mathbf{R}$. Conform ipotezei $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$. Dar șirul $(c_n - a_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent, conform corolarului teoremei II.8, și, în plus, $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = l - l = 0$. Aplicînd corolarul 2 al teoremei II.4, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, deci șirul $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ converge către $0 + l = l$.

Dacă $l = \infty$, atunci din faptul că $a_n \to \infty$, rezultă că $b_n \to \infty$ și dacă $l = -\infty$, atunci din faptul că $c_n \to -\infty$ și $b_n \leqslant c_n$, rezultă că $b_n \to -\infty$.

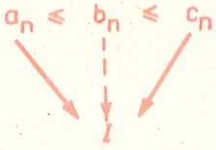


Fig. II.16

EXERCIȚII (capitolul II, § 3)

1. Să se arate că pentru $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(a, b \in \mathbf{R})$, avem

$$\frac{a_n + b_n}{2} \to \frac{a + b}{2} \text{ și } a_n^2 + b_n^2 \to a^2 + b^2.$$

2. Fie $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ două șiruri de numere, primul fiind convergent către zero și al doilea fiind mărginit. Să se arate că șirul $(a_n b_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent către zero.

3. Să se arate că dacă $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir convergent către un număr nenul, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Să se dea un exemplu de șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ astfel încît limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ să existe și să fie diferită de 1.

4. Se consideră șirul $c_n = \frac{2n^2 + 7n - 10}{5n^2 + 1}$, $n \geqslant 1$. Să se determine două șiruri $a_n \to 2$, $b_n \to 5$ astfel încît $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ pentru orice $n \geqslant 1$ și apoi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

5. Să se calculeze limitele de șiruri:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n^2+7}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+100}{2n^3+3}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^3+4}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^3}$.

6. Să se arate că $\forall p \geqslant 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p+2^p+\ldots+n^p} = 1$.

7. Să se arate că pentru orice $l \in \overline{\mathbf{R}}$ există șiruri:

1°. $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, astfel încît $\dfrac{a_n}{b_n} \to l$.

2°. $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$, astfel încît $a_n - b_n \to l$.

3°. $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, astfel încît $a_n b_n \to l$.

§ 4. Calculul limitelor de șiruri

În acest paragraf vor fi studiate cîteva șiruri mai des întîlnite și va fi dată noțiunea de serie, care este strîns legată de cea de șir. O atenție deosebită va fi acordată introducerii numărului e, precum și sublinierii unor aspecte algoritmice.

4.1. Cîteva șiruri-tip

a) *Șirul* $(q^n)_{n\geqslant 0}$. Fie q un număr real fixat și $a_n = q^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Dacă $q = 1$, atunci $a_n \to 1$, iar dacă $q > 1$, atunci $q = 1 + b$ $(b > 0)$ și $q^n = (1 + b)^n \geqslant 1 + nb$, deci $a_n \to \infty$. Dacă $q \leqslant -1$, atunci șirul este divergent. În sfîrșit, dacă $-1 < q < 1$, notăm $c_n = |q|^n$, $n \geqslant 0$. Acest șir este atunci mărginit $(0 \leqslant c_n \leqslant 1)$ și, fiind monoton descrescător, el este convergent. Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$; din relația $c_{n+1} = |q| c_n$ se obține, la limită, $l = |q| l$, deci $l = 0$.

În concluzie, am demonstrat următoarea

TEOREMA II. 13. Șirul $(q^n)_{n\geqslant 0}$ este convergent dacă și numai dacă $-1 < q < 1$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } -1 < q < 1. \\ 1, & \text{dacă } q = 1. \end{cases} \tag{9}$$

(Această limită este egală cu $+\infty$, dacă $q > 1$ și nu există în cazul $q \leqslant -1$.)

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{40}{41}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{41}{40}\right)^n = \infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n$ nu există; apoi $\lim\limits_{n\to\infty} 1{,}00001^n = \infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} 0{,}99999^n = 0$.

b) *Șirul* $(P(n))_{n\geqslant 0}$, *cu* P *funcție reală polinomială.*

Presupunem că $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție polinomială de grad $k \geqslant 1$, cu coeficienți reali, $P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $a_0 \neq 0$.

Se poate considera atunci șirul

$$P(n) = a_0n^k + a_1n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k,\ n \geqslant 0.$$

Evident, pentru orice $n \geqslant 1$, avem $P(n) = n^k \cdot c_n$, unde

$$c_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{a_k}{n^k}.$$

Conform teoremelor II.8—II.10, avem $c_n \to a_0$, deci

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} n^k \cdot c_n = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

Pe de altă parte, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} a_0n^k = \begin{cases} \infty, \text{ dacă } a_0 > 0 \\ -\infty, \text{ dacă } a_0 < 0. \end{cases}$$

Așadar, *limita* $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$ *este egală cu limita termenului de grad maxim,* a_0n^k, *al lui* $P(n)$ și este $+\infty$ sau $-\infty$, după cum coeficientul a_0 este pozitiv sau negativ. Am presupus P de grad cel puțin 1. Dacă P este de grad 0, adică o constantă k, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} P(n) = k$.

Exemple

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 100\,000n) = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^3 + 10^4 \cdot n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-n^3) = -\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^2 - (n-1)^2] = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^2 - n^2 - 2n] = 1$.

c) *Șirul* $\left(\frac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ *cu* P, Q *funcții reale polinomiale.* Se consideră două funcții polinomiale P, $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$P(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k,\ a_0 \neq 0,\ k \geqslant 1,$$

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,\ b_0 \neq 0,\ m \geqslant 1.$$

Fie N un număr natural mai mare decît orice rădăcină reală a lui Q. Atunci, pentru orice $n > N$, avem

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^k\left(a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}\right)}{n^m\left(b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}\right)}.$$

Dacă $k = m$, atunci, deoarece cele două paranteze tind către a_0 și respectiv b_0, pentru $n \to \infty$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0}{b_0}$$ (raportul coeficienților termenilor de grad maxim).

Dacă $k < m$, atunci

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{1}{n^{m-k}} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}} \to 0 \cdot \frac{a_0}{b_0} = 0.$$

Dacă $k > m$, atunci

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = n^{k-m} \cdot \frac{a_0 + \frac{a_1}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n^k}}{b_0 + \frac{b_1}{n} + \ldots + \frac{b_m}{n^m}} \to \infty \cdot \frac{a_0}{b_0}.$$

Așadar, am demonstrat următoarea

TEOREMA II. 14. Dacă P, Q sînt funcții polinomiale ca mai sus, atunci

(10)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } gr\ P < gr\ Q \\ \infty, & \text{dacă } gr\ P > gr\ Q \text{ și } a_0 b_0 > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } gr\ P > gr\ Q \text{ și } a_0 b_0 < 0 \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } gr\ P = gr\ Q. \end{cases}$$

Exemple

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-100}{2n^3+n^2-72} = \frac{5}{2}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2}{n^3+n+10} = 1.$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^2} = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2} = 6.$

4.2. Șiruri definite prin recurență

Pînă acum am considerat șiruri pentru care termenul general a fost indicat explicit. Există situații în care este indicată doar posibilitatea de a calcula, pentru fiecare n, termenul de rang n, în funcție de termenii anteriori. Mai precis, presupunem că pentru un șir $(a_n)_{n\geqslant 0}$ se cunosc termenii $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ ($k \geqslant 1$ fixat) și, în plus, a_n este exprimat în funcție de termenii anteriori $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$, pentru orice $n \geqslant k$. În acest caz, se spune că șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *este definit prin recurență cu k termeni* (recurrere=a se întoarce, lat.). Cazurile cele mai întîlnite sînt $k = 1$ și $k = 2$. Pentru unele calcule făcute cu ajutorul calculatorului șirurile definite prin recurență prezintă avantaje nete.

Exemple

1) O progresie aritmetică cu primul termen a_1 și rația r este un șir $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin recurență cu un termen prin relația $a_n = a_{n-1} + r$, $\forall\, n \geqslant 2$. Se știe, dar se demonstrează și direct, că $a_n = a_1 + (n-1)r$, $\forall\, n \geqslant 1$.

În mod similar, progresia geometrică cu primul termen a_1 și rația q este șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin recurență cu un termen prin relația $a_n = a_{n-1} \cdot q$, $\forall\, n \geqslant 2$ (a_1, q fiind date); în acest caz, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

2) Dăm un exemplu foarte important de şir definit prin recurenţă cu doi termeni, anume şirul $(f_n)_{n\geqslant 0}$ al lui L. Fibonacci (1170—1240), dat prin

$$f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ pentru orice } n \geqslant 2.$$

Aşadar, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_2 = f_1 + f_0 = 2$, $f_3 = f_2 + f_1 = 3$, $f_3 = 5$ etc. Pentru a obţine o altă exprimare a lui f_n se poate proceda astfel: se caută numere reale α, β, u, $v (u \neq v)$ astfel încît

$$f_n = \alpha u^n + \beta v^n, \text{ pentru orice întreg } n \geqslant 0$$

(adică, scriind f_n ca suma termenilor generali a două progresii geometrice). Condiţia $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ devine $\alpha u^n + \beta v^n = \alpha u^{n-1} + \beta v^{n-1} + \alpha u^{n-2} + \beta v^{n-2}$, adică $\alpha u^{n-2}(u^2 - u - 1) + \beta v^{n-2}(v^2 - v - 1) = 0$, $\forall\, n \geqslant 2$. Se observă că această condiţie este îndeplinită dacă u, v sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$, de exemplu $u = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Atunci $f_n = \alpha\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $\forall\, n \geqslant 2$ şi rămîne să determinăm α, β ca această relaţie să aibă loc pentru $n = 0$, $n = 1$, folosind condiţiile $f_0 = 1$, $f_1 = 1$. Se obţin $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ şi, în final,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right],\ \forall\, n \geqslant 0.$$

Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = +\infty$.

3) Ideea de recurenţă este legată de cea de algoritm ca procedeu efectiv de calcul pas cu pas şi este utilizată sistematic în programarea pe calculator. Dăm un exemplu de calcul al rădăcinii dintr-un număr, printr-o relaţie de recurenţă neliniară.

Fie $a > 0$ un număr real fixat şi $(x_n)_{n\geqslant 0}$ şirul definit prin relaţia de recurenţă

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right),\ \forall\, n \geqslant 1\ (x_0 > 0 \text{ fiind presupus cunoscut}).$$

Este evident că $x_n > 0$, pentru orice $n \geqslant 1$. Apoi, $x_n^2 - a \geqslant 0$, pentru orice $n \geqslant 1$, deoarece $x_n^2 - a = \dfrac{1}{4}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)^2 - a = \dfrac{1}{4}\left(x_{n-1} - \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geqslant 0$; de aici se deduce că şirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton descrescător, deoarece $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) - x_n = \dfrac{1}{2x_n}(a - x_n^2) \leqslant 0$, pentru orice $n \geqslant 1$. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton şi mărginit şi, ca atare, există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Deoarece $x_n > 0$ şi $x_n^2 \geqslant a$, rezultă $l > 0$. Din relaţia iniţială de recurenţă, se obţine

$$l = \frac{l}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right), \text{ adică } l^2 = a,\ l = \sqrt{a}, \text{ deci } x_n \to \sqrt{a}.$$

De exemplu, pentru calculul aproximativ al lui $\sqrt{2}$ se poate considera algoritmul definit prin $x_0 = 1$ și $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right)$, $n \geqslant 2$. În acest caz,

$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5$; $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{17}{12} \simeq 1{,}4167$; $x_3 \simeq 1{,}4142$ etc. și deja după trei pași se obține valoarea lui $\sqrt{2}$ cu trei zecimale exacte.

4.3. Serii de numere reale

Dacă q este un număr real și $q \neq 1$, atunci

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \tag{11}$$

așa cum se verifică imediat prin inducție după n.

Dacă $(a_n)_{n \geqslant 1}$ este o progresie geometrică, avînd primul termen a_1 și rația $q \neq 1$ și dacă se notează cu s_n suma primilor n termeni ai acestei progresii, atunci

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} =$$

$$= a_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ aplicînd (11).}$$

În cazul cînd $q = 1$, avem $s_n = n \cdot a_1$.

Dacă $-1 < q < 1$, atunci $q^n \to 0$ (cf. teoremei II.13) și, ca atare,

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Această relație se mai scrie sugestiv

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1 - q} \text{ (pentru } -1 < q < 1).$$

Situația descrisă mai sus se generalizează în modul următor.

Considerăm un șir $(a_n)_{n \geqslant 0}$ de numere reale. Atunci se poate defini un nou șir $(s_n)_{n \geqslant 0}$ punînd $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, numit *șirul sumelor parțiale asociat șirului* $(a_n)_{n \geqslant 0}$.

Așadar,

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \text{ etc.}$$

De exemplu, dacă $a_n = q^n$ $(n \geqslant 0)$, atunci $s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$, adică suma (11), iar dacă $a_n = n$ $(n \geqslant 0)$, atunci

$$s_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

DEFINIȚIA II. 5. Se numește serie de termen general a_n perechea de șiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 0}$, unde $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Această serie se notează $\sum_{n\geq 0} a_n$ sau $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$. Se definește, în mod similar, seria $\sum_{n\geq N} a_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$.

Exemple

1) Seria de termen general q^n, adică $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \ldots$, se numește *seria geometrică* de rație q.

2) Seria de termen general $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, adică $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, se numește *seria armonică* (denumirea fiind justificată prin aceea că $a_n = \frac{1}{n}$ este media armonică a numerelor a_{n-1} și a_{n+1}, adică $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$).

3) Considerăm seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+n}$ de termen general $a_n = \frac{1}{n^2+n}$, $n \geq 1$. Se observă că $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ deci $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$ $\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$. Evident, $s_n \to 1$.

Este incorectă afirmația „seria este o sumă infinită", pentru că nu se pot aduna o infinitate de numere reale, de aceea este necesară noțiunea de limită. Se poate însă spune că studiul seriilor se află la confluența studiului sumelor finite cu cel al limitelor de șiruri.

DEFINIȚIA II. 6. O serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ se numește convergentă dacă șirul $(s_n)_{n\geq 0}$ al sumelor ei parțiale este convergent; în acest caz, numărul $\lim_{n\to\infty} s_n$ se numește suma acelei serii și se notează cu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Seriile care nu sînt convergente se numesc divergente.

Este evident că dacă la o serie se adaugă sau se scad termeni în număr finit, atunci natura acelei serii nu este modificată. Problema principală a teoriei seriilor este studiul naturii acestora (convergența sau divergența), iar în caz de convergență, calculul exact sau aproximativ al sumelor.

TEOREMA II. 15. Fie q, a $(a \neq 0)$ numere reale. Seria geometrică $\sum_{n\geq 0} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots$ este convergentă dacă și numai dacă $-1 < q < 1$ și, în acest caz, suma ei este $\frac{a}{1-q}$.

Demonstrație. Șirul sumelor parțiale este $s_n = a + aq + \ldots + aq^n$, $n \geq 0$. Dacă $q = 1$, atunci $s_n = (n+1)a$ și seria este evident divergentă. Dacă

$q \neq 1$, atunci $s_n = a(1 + q + \ldots + q^n) = a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, conform (11). Aplicînd relaţia (9), şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ este convergent dacă şi numai dacă $-1 < q < 1$ şi, în acest caz, $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$.

Exemple

1) În cazul seriei geometrice $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$ raţia este $q = \dfrac{1}{2}$ şi suma seriei va fi $\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

2) Fracţia zecimală periodică 2,1919... reprezintă numărul

$$2 + \frac{1}{10} + \frac{9}{100} + \frac{1}{1\,000} + \frac{9}{10\,000} + \ldots = 2 + \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{100}} + \frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{100}} = 2 + \frac{19}{99}.$$

Se arată uşor că orice fracţie zecimală periodică reprezintă un număr raţional (şi reciproc).

4.4. Numărul e

La punctul 1.1 am indicat legea de înjumătăţire a unei substanţe radioactive, în care s-a evidenţiat o progresie geometrică de raţie $\dfrac{1}{2}$. Există şi alte „legi de creştere" similare. De exemplu, presupunem că populaţia unei colectivităţi este, la un moment dat, P şi că în fiecare an ea creşte cu $c\%$. Peste un an populaţia respectivă va fi $P_1 = P + P \cdot \dfrac{c}{100} = P\left(1 + \dfrac{c}{100}\right)$, peste doi ani $P_2 = P_1 + P_1 \cdot \dfrac{c}{100} = P_1\left(1 + \dfrac{c}{100}\right) = P\left(1 + \dfrac{c}{100}\right)^2$, iar peste n ani, $P_n = P \cdot \left(1 + \dfrac{c}{100}\right)^n$, aşa cum se verifică prin inducţie.

Notînd

$$E_c = \left(1 + \frac{c}{100}\right)^{\frac{100}{c}},$$ rezultă

$$P_n = P\left(1 + \frac{c}{100}\right)^{\frac{100}{c}\cdot\frac{cn}{100}} = P \cdot (E_c)^{\frac{cn}{100}}.$$

Dacă $c = 100$, atunci $E_c = (1+1)^1 = 2$; $c = 50$, $E_c = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} = 2{,}250$; $c = 10$, $E_c \simeq 2{,}594$; $c = 2$, $E_c \simeq 2{,}692$ etc.

Vom vedea că limita $\lim\limits_{c\to 0} E_c$ există şi are o valoare remarcabilă, anume numărul e. Atunci pentru c „suficient de mic" are loc formula aproximativă $E_c \simeq e$ şi, în consecinţă,

$$P_n \simeq P \cdot e^{\frac{cn}{100}}$$

De exemplu, dacă $c = 2$, atunci peste 50 de ani populaţia va deveni $P_{50} \simeq P \cdot e$. Există multe alte probleme în rezolvarea cărora se foloseşte numărul e.

Trecem la definiția numărului e.

Considerăm șirul de numere raționale

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Se pot calcula diverși termeni ai acestui șir: $e_1 = 2$, $e_2 = 2{,}250$, $e_4 \simeq 2{,}441$, $e_8 \simeq 2{,}566$, $e_{16} \simeq 2{,}638$ etc. și aceasta sugerează că șirul $(e_n)_{n\geqslant 1}$ este crescător, cu termenii cuprinși între 2 și 3. Într-adevăr, are loc

TEOREMA II. 16. Șirul $(e_n)_{n\geqslant 1}$ este strict crescător și mărginit (deci convergent).

Demonstrație. Considerăm formula binomului lui Newton

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}x^n, \ \forall\, x \in \mathbf{R}, \ n \geqslant 1.$$

Înlocuind aici $x = \frac{1}{n}$, membrul stîng este egal cu e_n; observînd că

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

pentru $1 \leqslant k \leqslant n$, rezultă că

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \tag{13}$$

Înlocuim n cu $n+1$ și rezultă

$$e_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots$$

$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right);$$

observînd că $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$,

se obține că $e_n < e_{n+1}\ \forall,\ n \geqslant 1$.

Din relația (13) rezultă direct că

$$2 \leqslant e_n \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \quad \forall\, n \geqslant 1. \tag{14}$$

Ținînd cont că, pentru orice $k \geqslant 2$ natural, avem $k! \geqslant 2^{k-1}$, deci $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$, avem

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3. \tag{15}$$

Din relațiile (14) și (15) rezultă $2 \leqslant e_n < 3$, $\forall\, n \geqslant 1$ și teorema este demonstrată.

DEFINIȚIA II. 7. Limita șirului $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se notează cu e (după inițiala numelui lui L. Euler, 1707–1783).

Indicăm acum un alt șir convergent către e, anume șirul

$$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},\ n \geqslant 1.$$

Este evident că $E_n < E_{n+1}$, deoarece $E_{n+1} - E_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Apoi, aplicînd (15), avem $2 < E_n < 3$, $\forall\, n \geqslant 1$. Așadar, șirul $(E_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton și mărginit, deci convergent. Fie $E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

Deoarece $e_n \leqslant E_n$, conform (14), rezultă $e \leqslant E$.

Pe de altă parte, pentru orice $k \geqslant 2$ fixat și pentru orice $n > k$ avem, conform (13):

$$e \geqslant e_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

și în membrul drept se însumează $k + 1$ termeni. Făcînd $n \to \infty$ și observînd că parantezele $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, ..., $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ tind către 1, rezultă că $e \geqslant E_k$, $\forall\, k \geqslant 2$ fixat, deci $e \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} E_k = E$. În concluzie $E = e$, adică

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right).$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat

TEOREMA II. 17. Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ este convergentă și are suma e.

Aplicație. Calculăm e cu $\frac{1}{10^6}$ — aproximare. Deoarece $e = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ avem formula aproximativă $e \simeq E_n$, cu eroarea absolută: $|e - E_n| = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right] \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right] = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)} < \frac{1}{n \cdot n!}$.

Reținem astfel inegalitatea

$$0 < e - E_n < \frac{1}{n \cdot n!},\ \forall\, n \geqslant 1. \tag{16}$$

Alegem n natural minim astfel încît $\frac{1}{n \cdot n!} > 10^{-6}$, deci $n = 9$. Atunci

$$e \simeq E_9 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{9!} = 2{,}71828.$$

EXERCIȚII (capitolul II, § 4)

1. Să se calculeze limitele următoare:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{3^n+2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+1}{4^n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+1}{4^{n-1}+2}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} n[2+(-1)^n]$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+(-2)^n}{3^n}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{\pi}{10}$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{\pi}{10}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{4}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\pi}{3}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1}$;

l) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-\sqrt{n})$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2+n+100)$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^6+1}-n^2)$;

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+5n}{3n^2+2}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^2-8}$;

q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{n^4}$;

r) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(1+2+\ldots+n)}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$;

s) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$;

t) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$;

u) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10+\frac{1}{n}\right)^2$;

v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(10+\frac{1}{n}\right)^n$;

w) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^3+2}}$;

y) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n-1}{a^{2n}+1}$, $a \neq -1$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}$, $a \in \mathbb{R}$ dat.

2. Să se arate că pentru orice funcție rațională nenulă R cu coeficienți reali, avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{R(n+1)} = 1.$$

3. Să se studieze convergența șirului

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n \geqslant 2.$$

4. Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(an-\sqrt{-2+bn+cn^2}\right) = 1$.

5. Fie un șir $(x_n)_{n\geqslant 0}$, astfel încît $x_0 = a$, $x_{n+1} = 1+bx_n$ $(n \geqslant 0)$. Să se arate că $x_n = 1+b+\ldots+b^{n-1}+ab^n$. Pentru ce $a, b \in \mathbb{R}$ șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent?

6. Să se studieze mărginirea și monotonia șirului $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \geqslant 1$. În caz de convergență, să se calculeze limita.

7. Fie a_0, a_1 date și $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$ pentru orice $n \geqslant 2$. Să se arate că

$$a_n = \frac{1}{3}(2a_1+a_0) + \frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-1}}(a_1-a_0),\ \forall n \geqslant 0$$

și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

8. Fie șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$, unde $x_1 = a$ și $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Să se arate că dacă $a \in [1, 2]$, atunci șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

9. Să se studieze monotonia și convergența șirului $(c_n)_{n\geqslant 1}$ definit prin $c_1=10$, $c_{n+1}=\frac{2+c_n^2}{2c_n}$, $\forall\, n\geqslant 1$. De asemenea, studiați convergența șirului $(x_n)_{n\geqslant 0}$ definit prin $x_0=1$ și $x_{n+1}=\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+1}}$, $n\geqslant 0$.

10. Să se arate că dacă $a_n>0$, $n\geqslant 0$, dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ și $l<1$, atunci $a_n\to 0$. Folosind acest fapt, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$, $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n (-1<q<1$ dat).

11. Să se arate că seriile următoare sînt convergente și să se calculeze sumele lor:

a) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^2-1}$; b) $\sum\limits_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2+n}$; c) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$;

d) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{2}{3}\right)^n$; e) $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{2}{7^{n+2}}$; f) $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{2n+1}{n!}$.

12. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}-\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$ este convergentă, iar seria $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$ este divergentă.

§ 5. Operații cu limite de funcții

Rezultatele anterioare conduc la rezultate similare pentru limite de funcții.

TEOREMA II. 18. Fie $f: D\to\mathbf{R}$, $g: D\to\mathbf{R}$ ($D\subset\mathbf{R}$) două funcții și $\alpha\in\overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D. Presupunem că f și g au limită finită în punctul α și fie $l_1=\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, $l_2=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$. Atunci funcțiile $f+g$, $\lambda f(\lambda\in\mathbf{R})$ și fg au limită finită în punctul α și

(17) $\lim\limits_{x\to\alpha}[(f+g)(x)]=l_1+l_2$, $\lim\limits_{x\to\alpha}(\lambda f)(x)=\lambda l_1$, $\lim\limits_{x\to\alpha}(fg)(x)=l_1l_2$

(pe scurt, limita sumei este suma limitelor, limita produsului este produsul limitelor).

Dacă, în plus, $l_2 \neq 0$, atunci există o vecinătate U a lui α astfel încît funcția g să fie nenulă în $U \setminus \{\alpha\}$ și, în plus, $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Demonstrație. Fie $x_n \to \alpha$ un șir oarecare de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$. Atunci $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ și aplicînd relațiile (5), (6), rezultă că $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to l_1 + l_2$, $(\lambda f)(x_n) = \lambda \cdot f(x_n) \to \lambda l_1$ și $(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to l_1 \cdot l_2$ și se deduc relațiile (17).

Presupunem acum $l_2 \neq 0$, de exemplu $l_2 > 0$. Luînd o vecinătate $V = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$ a lui l_2, care nu conține originea, există o vecinătate U a lui α astfel încît din faptul că $x \in U$, $x \neq \alpha$ să rezulte $g(x) \in V$, adică $g(x) > 0$. Fie apoi un șir oarecare $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$. Atunci $f(x_n) \to l_1$, $g(x_n) \to l_2$ și aplicînd corolarul teoremei II.10, rezultă $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{l_1}{l_2}$, adică $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Exemple

1) Deoarece $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} (2x+7) = 9$, rezultă $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 + 2x + 7) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 + \lim\limits_{x\to 1} (2x+7) = 1 + 9 = 10$.

2) Teorema II. 18 nu se poate aplica direct pentru a calcula limita $l = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$, deoarece numitorul are limita nulă în punctul $x = 1$. Totuși, pentru orice $x \neq 1$, avem $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ și, ca atare, $l = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$.

3) Teorema II. 18 se extinde direct la cazul cînd $l_1, l_2 \in \overline{\mathbf{R}}$, cu condiția evitării cazurilor exceptate, care trebuie analizate separat. De exemplu, $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 2x) = \infty$. [Într-adevăr, fie $D = (0, \infty)$ și funcția $f : D \to \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x^2 + 2x$; pentru orice șir $x_n \to \infty$, avem $f(x_n) = x_n^2 + 2x_n \to \infty$].

4) Dacă o funcție $f : D \to \mathbf{R}$ are limita $+\infty$ sau $-\infty$ într-un punct $x = \alpha$ de acumulare pentru D, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = 0$; într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$ avem $f(x_n) \to +\infty$ (sau $-\infty$) și $\frac{1}{f(x_n)} \to 0$, conform teoremei II.10,2°.

În mod similar, dacă limita $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ există și este egală cu zero și dacă $f > 0$ (respectiv $f < 0$) într-o vecinătate a punctului α, din care excludem α, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{1}{f(x)} = \infty$ (respectiv $-\infty$); într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $f(x_n) \to 0$ și aplicăm teorema II.10,3°.

TEOREMA II. 19. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) două funcții și $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ un punct de acumulare pentru D. Dacă există o vecinătate U a lui α astfel încît $f \leqslant g$ în $U \setminus \{\alpha\}$ și dacă funcțiile f, g au limită în punctul α, atunci

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) \leqslant \lim_{x\to\alpha} g(x). \tag{18}$$

Demonstrație. Considerăm un șir oarecare $x_n \to \alpha$ din $D \setminus \{\alpha\}$. Avem $x_n \in U \setminus \{\alpha\}$ și $f(x_n) \leqslant g(x_n)$, începînd de la un anumit rang N și cum șirurile $(f(x_n))_{n\geqslant N}$, $(g(x_n))_{n\geqslant N}$ au limită, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ conform teoremei II.11. Așadar, relația (18) este probată.

Teorema cleștelui se formulează și pentru limite de funcții: *dacă* $f, g, h : D \to \mathbf{R}$ *sînt funcții reale astfel încît* $f \leqslant g \leqslant h$ *într-o vecinătate a lui* α *(excluzînd eventual* α*) și dacă* f, h *au aceeași limită* l *în punctul* α*, atunci* g *are, de asemenea, limita* l *în punctul* α. Remarcăm, de asemenea, faptul că teorema II.4 se formulează și pentru limite de funcții: dacă funcțiile $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$, satisfac condiția $|f(x) - l| \leqslant g(x)$, $\forall\, x \in D \setminus \{\alpha\}$, unde $l \in \mathbf{R}$ și dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, atunci există $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$. Apoi dacă $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall\, x \in D \setminus \{\alpha\}$ și $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, iar dacă $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$.

EXERCIȚII (capitolul II, § 5)

1. Să se calculeze limitele laterale ale funcțiilor de mai jos în punctele indicate:

a) $f : \mathbf{R} \setminus \{-5\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x+5}$, $\alpha = -5$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-3}}}, & \text{dacă } x \neq 3 \\ 2, & \text{dacă } x = 3 \end{cases}$, $\alpha = 3$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$, $\alpha = 0$;

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{(x+1)^2}, & \text{dacă } x \neq -1 \\ 7, & \text{dacă } x = -1 \end{cases}$, $\alpha = -1$.

2. Să se calculeze (în $\overline{\mathbf{R}}$) următoarele limite de funcții:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2x^2+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2x^2+3}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{2x^2+3}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)^3 - x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{|x-1|}$;

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2}{(x-1)^2}$;

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^{|x-1|} - 1}$;

j) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^4-1}{x-1} + \dfrac{x^8-1}{x^2-1}\right)$.

3. Fie $f : D \to \mathbf{R}$ o funcție definită pe complementara D a unui interval mărginit. Să se arate că dacă una din limitele $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$ există, atunci există și cealaltă și sînt egale. Ca aplicație să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - x)$;

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2+1})$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2+1}{7x^2+3}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

§ 6. Asimptotele funcțiilor reale

Vom da acum o primă aplicație geometrică semnificativă legată de limitele de funcții.

În limba greacă „asumptôtos" înseamnă „care nu coincid". Problema asimptotelor, adică a dreptelor care „se apropie oricît de mult" de graficele unor funcții, are sens pentru funcții avînd ramuri spre infinit (adică funcții al căror grafic nu este conținut într-un dreptunghi).

Fixăm un sistem ortogonal de axe xOy relativ la care raportăm graficele funcțiilor considerate, ca și sensul adjectivelor „orizontal", „oblic", „vertical".

6.1. Asimptote orizontale, asimptote oblice

Considerăm o funcție $f : D \to \mathbf{R}$ unde D este un interval de forma (a, ∞), $a \in \mathbf{R}$. Graficul lui f are ecuația $y = f(x)$ și evident are ramuri spre infinit. Fie $l \in \mathbf{R}$ fixat și considerăm dreapta $y = l$ (paralelă cu Ox); pentru orice $x \in D$, notăm cu M (respectiv cu N) punctul de abscisă x situat pe dreaptă (respectiv pe graficul funcției f).

Se spune că dreapta $y = l$ este *asimptota orizontală spre* $+\infty$ a lui f dacă limita lungimii segmentului MN cînd x tinde către ∞ există și este egală cu zero, adică

(19) $$\lim_{x \to \infty} |f(x) - l| = 0 \text{ (figura II.17).}$$

Aceasta este echivalentă cu faptul că limita $\lim_{x \to \infty} f(x)$ există și este egală cu l.

O discuție similară are loc pentru $-\infty$ (fig. II.18).

Considerăm acum o dreaptă de ecuație $y = mx + n$, $m \neq 0$ și fie M (respectiv N) punctul de abscisă $x \in D$ situat pe dreaptă (respectiv pe graficul funcției f), ca în figura II.19. Se spune că dreapta $y = mx + n$ este *asimptota oblică spre* $+\infty$ a lui f dacă limita lungimii segmentului MN există și este egală cu zero pentru $x \to \infty$, adică

(20) $$\lim_{x \to \infty} |f(x) - mx - n| = 0$$

Aceasta revine la $\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx - n) = 0$, adică

$\lim_{x \to \infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right) = 0$ și în mod necesar, $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right) = 0$.

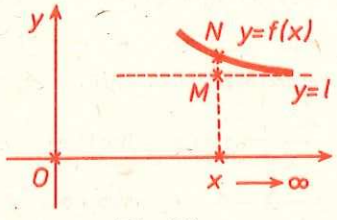


Fig. II.17

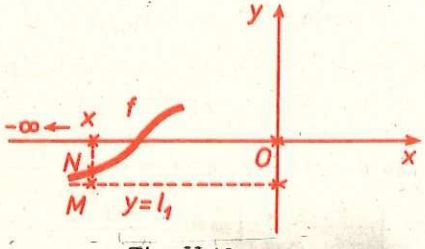


Fig. II.18

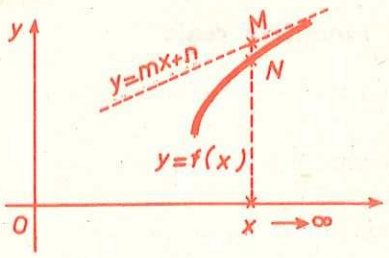


Fig. II.19

Atunci raportul $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}\right) + \left(m + \frac{n}{x}\right)$ va avea, conform teoremei II.18, limita egală cu $0 + m = m$ în punctul ∞. Din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = 0$, rezultă direct că limita $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx)$ există și este egală cu n.

Rezumăm discuția anterioară în următoarea

TEOREMA II. 20. a) **Dacă limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există și este finită, cu valoarea l, atunci dreapta $y = l$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ a funcției f (și reciproc).**

b) Dacă există și sînt finite limitele

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx), \quad \text{iar } m \neq 0, \tag{21}$$

atunci dreapta

$$y = mx + n \tag{22}$$

este asimptota oblică spre $+\infty$ a funcției f (și reciproc).

O funcție f nu poate admite atît asimptotă orizontală cît și asimptotă oblică spre $+\infty$ (în caz contrar ar exista constante reale m, n, l cu $m \neq 0$ astfel încît $\lim\limits_{x\to\infty} (mx + n - l) = 0$, ceea ce este absurd).

Se tratează în mod similar cazul asimptotelor oblice spre $-\infty$. Remarcăm că pentru o funcție fixată pot avea loc diverse situații: să existe asimptote orizontale atît spre $-\infty$ cît și spre $+\infty$ (distincte sau nu), să existe asimptotă orizontală spre $+\infty$ și oblică spre $-\infty$ etc. Asimptotele unei funcții sînt numite uneori asimptote la graficul funcției.

Exemple

1) Funcția $f : R\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ are asimptotă orizontală spre $+\infty$ și spre $-\infty$, anume dreapta $y = 0$ (axa Ox) (fig. II.20).

2) Funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$, anume dreapta $y = mx + n$, unde $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3x} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\frac{x^2}{x+3} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x}{x+3} = -3$; așadar, $y = x - 3$ este asimptota oblică a

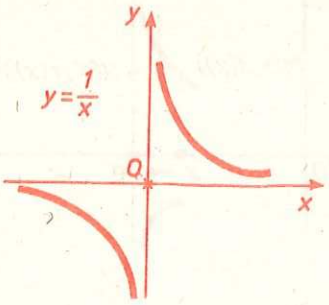


Fig. II.20

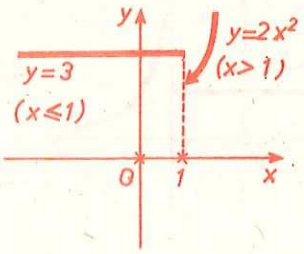


Fig. II.21

lui f spre $+\infty$. Se mai putea scrie $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x+3}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (x-3)] = 0$ și conform (20) și (22) rezultă direct $y = x - 3$ etc.

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x^2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ (fig. II.21),

are asimptotă orizontală $y = 3$ spre $-\infty$ dar nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

4) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2$ nu are asimptote orizontale sau oblice.

5) Considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+1}, & \text{dacă } x < -1 \\ 2, & \text{dacă } x \geqslant -1 \end{cases}$. Ea are asimptotă orizontală spre $+\infty$, anume $y = 2$, iar spre $-\infty$ are asimptota oblică $y = x - 1$.

6.2. Asimptote verticale

Dacă $f : D \to \mathbf{R}$ ($D \subset \mathbf{R}$) este o funcție reală, $\alpha \in \mathbf{R}$ este un punct de acumulare pentru D și dacă limita la stînga

(23) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x<\alpha}} f(x)$ există și este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$,

atunci se spune că dreapta $x = \alpha$ este *asimptotă verticală la stînga* a lui f. Similar, dacă limita la dreapta

(23') $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x>\alpha}} f(x)$ există și este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$,

se spune atunci că $x = \alpha$ este *asimptotă verticală la dreapta* a lui f.

Dreapta $x = \alpha$ se numește *asimptotă verticală* a lui f dacă ea este asimptotă verticală la stînga sau la dreapta a lui f sau de ambele părți.

Exemple

1) Pentru funcțiile $f, g : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, dreapta $x = 1$ este asimptotă verticală.

2) Funcția $f : \mathbf{R}\setminus\{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x < 2 \\ \frac{1}{x-2}, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$ (fig. II.22),

are $x = 2$ asimptotă verticală la dreapta, dar nu are nici o asimptotă verticală la stînga.

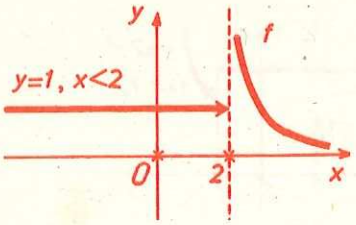


Fig. II.22

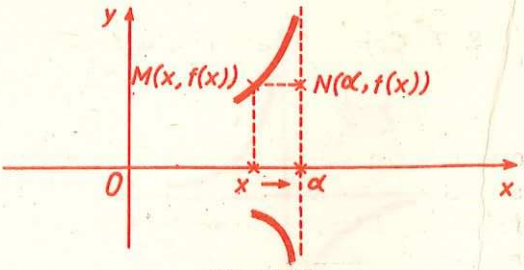


Fig. II.23

3) Fie funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. În acest caz, dreptele $x = -1$, $x = 1$ sînt asimptote verticale, iar dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală (spre $\pm\infty$).

4) Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{x^3 + x}$ are o unică asimptotă verticală, $x = 0$.

5) Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ are asimptotă verticală $x = 0$.

Adjectivul „verticală" provine de la faptul că orice dreaptă $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$ fixat) este paralelă cu axa Oy. Dacă $x = \alpha$ este asimptotă verticală la stînga pentru o funcție f, atunci lungimea segmentului MN tinde către zero cînd $x \to \alpha$, $x < \alpha$, iar ordonata lui M tinde către ∞ sau $-\infty$ (figura II.23) etc.

EXERCIȚII (capitolul II, § 6)

1. Să se determine asimptotele (orizontale, oblice și verticale) pentru următoarele funcții $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție).

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{(x^2 + 2x)(x^2 + 9)}$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$;

e) $f(x) = \dfrac{x}{|x + 1|}$;

f) $f(x) = \dfrac{|x|}{x + 2}$;

g) $f(x) = \dfrac{x}{(x - 1)(x - 5)}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$;

i) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x - |x|}$;

j) $f(x) = \dfrac{(x + 1)^2}{x^2}$;

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x - 1|}$;

l) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2}$, $x \neq 1$; $f(1) = 5$.

2. Să se afle numerele reale a, b dacă dreapta $y = 2x + 3$ este asimptotă spre $+\infty$ pentru funcțiile $f : D \to \mathbf{R}$ (D — domeniul maxim de definiție) următoare:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + ax + b}{x + 1}$; b) $f(x) = \dfrac{x + |x^2 - 1|}{ax + b}$; c) $f(x) = \dfrac{4x^2 + ax^2 + 1}{bx + 1}$.

3. Să se indice o funcție reală avînd ca asimptote toate dreptele $x = k$, $k \in \mathbf{Z}$.

4. Să se afle a, b, $c \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x^2 + 2x + c}$ să aibă o unică asimptotă verticală, iar graficul lui f să nu intersecteze asimptota orizontală.

§ 7. Calculul limitelor de funcţii

Acest paragraf este foarte important. În cea mai mare parte, ne vom ocupa de studiul unor funcţii importante, care apar în descrierea matematică a multor procese din natură. În capitolul I, 5.5 am dat o sinteză a acestor funcţii studiate în clasele anterioare şi acum ne ocupăm de proprietăţile acestora în legătură cu noţiunea de limită.

7.1. Limitele unor funcţii uzuale

a) *Funcţii polinomiale.* Este evident că $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to\alpha} x = \alpha$ şi $\lim\limits_{x\to\alpha} cx^k = c\alpha^k$, $c \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$ întreg (limita unui produs finit fiind produsul limitelor). Rezultă atunci că pentru orice funcţie polinomială reală P şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$\lim_{x\to\alpha} P(x) = P(\alpha), \tag{24}$$

deoarece P este suma finită a unor funcţii monom de tipul $x \longmapsto cx^k$.

Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a_0x^n$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} a_0x^n$, aplicînd un raţionament făcut la punctul 4.1.b.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to2} (x^2 + 5x) = 2^2 + 5 \cdot 2 = 14$; $\lim\limits_{x\to4} (-x^3 + 5x) = -4^3 + 5 \cdot 4 = -44$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 5x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$;

$\lim\limits_{x\to\infty} (-x^3 + 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3) = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 5x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^3 + 2x) = \infty$.

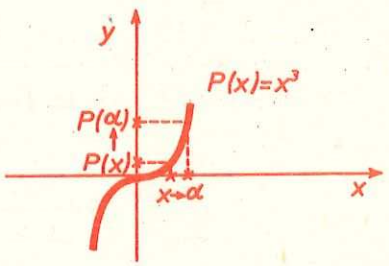


Fig. II.24

Graficele funcţiilor polinomiale de grad $n \geqslant 2$ nu au asimptote (orizontale, oblice sau verticale).

b) *Funcţii raţionale.* Dacă P şi Q sînt funcţii reale polinomiale şi $\alpha \in \mathbb{R}$ un punct astfel încît $Q(\alpha) \neq 0$, atunci

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}, \tag{25}$$

deoarece pentru orice şir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $\dfrac{P(x_n)}{Q(x_n)} \to \dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

În cazul cînd $Q(\alpha) = 0$, discuția este ceva mai dificilă: dacă $P(\alpha) \neq 0$, atunci limita $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} \frac{P(x)}{Q(x)}$ este ∞ sau $-\infty$ (la fel $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} \frac{P(x)}{Q(x)}$); dacă $P(\alpha) = 0$, atunci funcția rațională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi simplificată cu $x - \alpha$ etc.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{3^2+1}{3^3+1} = \frac{5}{14}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$ și $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)^3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{(x-1)^2} = \infty$;

3) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{1}{x+3}$ nu există;

4) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x}{(x+3)^2} = -\infty$, iar $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{(x+3)^2}$ nu există.

Raționînd ca în teorema II.14, *limita* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\left(ca\ și\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\right)$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai polinoamelor* P *și* Q.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{8x^2+x+2}{7x^2-2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2\left(8+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7-\frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(8+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{2}{x}\right)} = \frac{8}{7}$; similar

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{8x^2+x+2}{7x^2-2x} = \frac{8}{7}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3-x^3}{2x^2+5x} = \frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x+8}{2x^2+5x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{2x^2} = 0$.

3) Pentru orice n natural, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^n+1\,987}{8x^3+211} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^n}{8x^3} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n<3 \\ \infty, \text{ dacă } n>3 \\ \frac{3}{8}, \text{ dacă } n=3 \end{cases}$$

și $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^n+1\,987}{8x^3+211} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^n}{8x^3} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n<3 \\ -\infty, \text{ dacă } n>3 \text{ este par} \\ \infty, \text{ dacă } n>3 \text{ este impar} \\ \frac{3}{8}, \text{ dacă } n=3 \end{cases}$.

Dacă polinomul Q are ca rădăcini reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ și $P(\alpha_i) \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant k$, atunci graficul funcției raționale $\frac{P}{Q}$ admite asimptotele verticale $x = \alpha_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Dacă polinomul Q nu are rădăcini reale, atunci graficul lui $\frac{P}{Q}$ nu

are asimptote verticale (în acest caz, pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, limita $\lim\limits_{x \to \alpha} \frac{P}{Q}$ este finită, egală cu $\frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$).

O fracție rațională $\frac{P}{Q}$ admite asimptote orizontale dacă și numai dacă gr $P \leqslant$ gr Q și admite asimptotă oblică (aceeași spre $+\infty$ și spre $-\infty$) dacă și numai dacă gr $P =$ 1 + gr Q. Demonstrațiile sînt imediate.

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0, 1, -1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x+4}{x^3 - x}$ are dreptele $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, asimptote verticale și $y = 0$ asimptotă orizontală.

2) Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ nu are asimptote verticale sau orizontale, iar funcția $g : \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{x^3}{x - 2}$ are dreapta $x = 2$ asimptotă verticală.

c) *Funcția radical.* Dacă $\alpha > 0$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt{x} = \sqrt{\alpha}$; într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$ avem $x_n > 0$ de la un rang încolo și $|\sqrt{x_n} - \sqrt{\alpha}| = \frac{|x_n - \alpha|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot |x_n - \alpha|$, deci $\sqrt{x_n} \to \sqrt{\alpha}$. De asemenea, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$. În mod analog, pentru orice α real avem $\lim\limits_{x \to \alpha} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\alpha}$.

În general, dacă $n \in \mathbf{N}$ este impar, atunci

(26) $$\lim_{x \to \alpha} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha},$$ pentru orice α real.

De asemenea, în acest caz avem

(27) $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty; \quad \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty.$$

Dacă $n \in \mathbf{N}$ este par, atunci relația (26) are loc pentru $\alpha > 0$; de asemenea,

(28) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt[n]{x} = 0 \text{ și } \lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty.$$

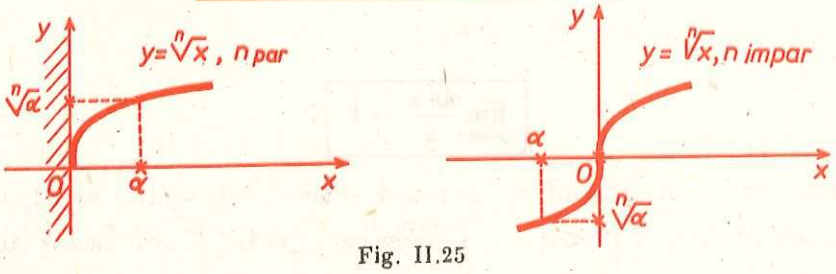


Fig. II.25

Relațiile (27), (28) se mai scriu simbolic $\sqrt[n]{\infty} = \infty$ pentru orice n natural și $\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ dacă n este impar.

d) *Funcții trigonometrice.* În clasele anterioare au fost definite funcțiile sin, cos, tg, arcsin etc. prin considerente geometrice, care foloseau în mod tacit proprietăți adînci ale numerelor reale. Adoptăm aceste definiții dar menționăm că o prezentare riguroasă a funcțiilor trigonometrice ca funcții reale poate fi dată prin utilizarea dezvoltărilor în serie.

Pentru orice α real avem

(29) $$\lim_{x\to\alpha} \sin x = \sin \alpha .$$

Într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$ avem $|\sin x_n - \sin \alpha| = \left|2 \sin \frac{x_n - \alpha}{2} \cos \frac{x_n + \alpha}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x_n - \alpha}{2}\right| \leqslant |x_n - \alpha|$, deoarece $|\sin x| \leqslant |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

În mod similar, se arată că

(30) $$\lim_{x\to\alpha} \cos x = \cos \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$$

și, folosind limita unui cît, rezultă că

(31) $$\lim_{x\to\alpha} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right) \text{ și}$$
$$\lim_{x\to\alpha} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha \quad (\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}).$$

De asemenea,

(32) $$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x<\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty$$

și, ca atare, dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ este asimptotă verticală pentru funcția tangentă.

Indicăm acum o limită cu totul remarcabilă.

TEOREMA II. 21. Avem

(33) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Demonstrație. Alegem un cerc de rază 1 și unghiul la centru avînd măsura în radiani egală cu $x \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. Avem aria $\triangle OAM <$ aria sector $AOM <$

$<$ aria $\triangle OAT$. Dar aria $\triangle OAM = \frac{1}{2}\sin x$, aria sector $AOM = \frac{1}{2}x$ și aria $\triangle OAT = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, deci $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ și înmulțind cu $\frac{2}{\sin x}$, rezultă $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$, adică

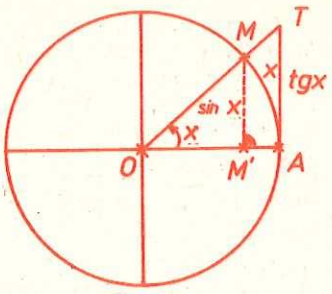


Fig. II.26

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Aceste inegalități au loc și pentru $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, deoarece funcțiile $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ sînt pare.

Pentru orice $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ avem de la un rang încolo $-\frac{\pi}{2} < x_n < \frac{\pi}{2}$ și deci

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

și deoarece $\cos x_n \to \cos 0 = 1$, se obține $\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$ (teorema II.12).

Exemple

1) Funcția sa: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\operatorname{sa}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

se numește „sinus atenuat" și graficul ei este schițat în figura II.27. Așadar, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{sa}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{sa}(x) = \operatorname{sa}(0) = 1$.

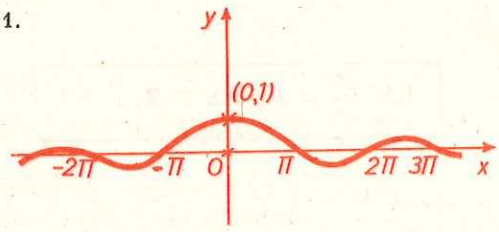


Fig. II.27

2) Avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} \cdot p = p \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} = p$, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin px}{px} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, punînd $y = px$ ($p \neq 0$ constant).

Aici este ilustrat un procedeu mai general numit „schimbare de variabilă". Anume, fie o funcție $f : D_1 \to \mathbf{R}$, $D_1 \subset \mathbf{R}$, l un punct de acumulare pentru D_1 astfel încît să existe $\lambda = \lim\limits_{y \to l} f(y)$. Dacă $u : D \to D_1$ este o funcție, α un punct de acumulare pentru D și $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = l$ și, în plus, $\{x \neq \alpha \text{ în } D \Rightarrow u(x) \neq l\}$, atunci $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \lambda$. Într-adevăr, pentru orice șir $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, avem $u(x_n) \to l$, $u(x_n) \neq l$, deci $f(u(x_n)) \to \lambda$. Se mai spune, pe scurt, că punînd $y = u(x)$ avem $\lim\limits_{x \to \alpha} f(u(x)) = \lim\limits_{y \to l} f(y)$.

e) *Funcția exponențială.* Fixăm $a > 0$, $a \neq 1$. Se cunoaște definiția lui a^x pentru $x \in \mathbf{Q}$; anume, dacă $x = \frac{p}{q}$ (p, q întregi, $q \geqslant 1$), atunci $a^x = \sqrt[q]{a^p}$. Dacă x este irațional și se alege un șir de numere raționale $r_n \to x$, atunci se poate arăta că șirul $(a^{r_n})_{n \geqslant 0}$ este convergent și limita lui se notează a^x [număr real independent de alegerea șirului r_n convergent către x, în sensul că dacă $r_n \to x$, $r'_n \to x$ și $r_n, r'_n \in \mathbf{Q}$, atunci $\lim\limits_{n \to \infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{r'_n}$].

De exemplu, $3^{\sqrt{2}} = \lim\limits_{n \to \infty} 3^{r_n}$, unde r_n este șirul trunchierilor lui $\sqrt{2}$.

Se arată că $a^x > 0$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x : a^y = a^{x-y}$ pentru orice x, $y \in \mathbf{R}$.

Cazul $a > 1$. În acest caz se obține o funcție strict crescătoare, care definește o aplicație bijectivă $\mathbf{R} \to (0, \infty)$, $x \longmapsto a^x$ și se poate arăta că pentru orice α real avem

$$\lim_{x \to \alpha} a^x = a^\alpha, \tag{34}$$

adică pentru orice șir $x_n \to \alpha$, avem $a^{x_n} \to a^\alpha$ (se mai spune că limita exponențialei este exponențiala limitei). În plus, se arată că

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \to \infty} a^x = \infty \ (a > 1) \tag{35}$$

și că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \ \forall\, n \in \mathbf{Z}, \ a > 1. \tag{36}$$

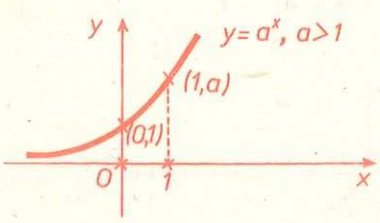


Fig. II.28

Verificarea riguroasă a acestor afirmații necesită unele dezvoltări mai laborioase.

Graficul funcției $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ pentru $a > 1$ are $y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$; el este de forma indicată în figura II.28.

În particular, funcțiile $x \longmapsto 2^x$, $x \longmapsto 10^x$, $x \longmapsto e^x$ au graficele de această formă.

Cazul $0 < a < 1$. În acest caz avem o funcție strict descrescătoare și bijectivă $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto a^x$ și, în plus,

$$\lim_{x \to \alpha} a^x = a^\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbf{R}; \ \lim_{x \to -\infty} a^x = \infty \text{ și } \lim_{x \to \infty} a^x = 0.$$

Graficul funcției f pentru $0 < a < 1$ are $y = 0$ asimptotă orizontală spre ∞ și este de forma indicată în fig. II.29.

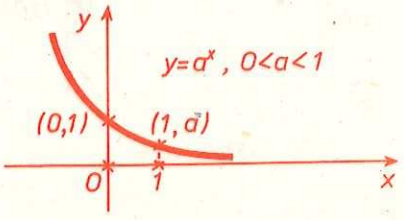


Fig. II.29

f) *Funcții hiperbolice.* Pentru orice $x \in \mathbf{R}$ se notează $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ („sinus hiperbolic"), $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ („cosinus hiperbolic") și $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. Graficele funcțiilor sh, ch sînt schițate în figura II.30. Este evidentă relația $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$, deci punctul (x, y) din plan de coordonate $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ „parcurge" ramura de hiperbolă $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$ (ceea ce justifică terminologia).

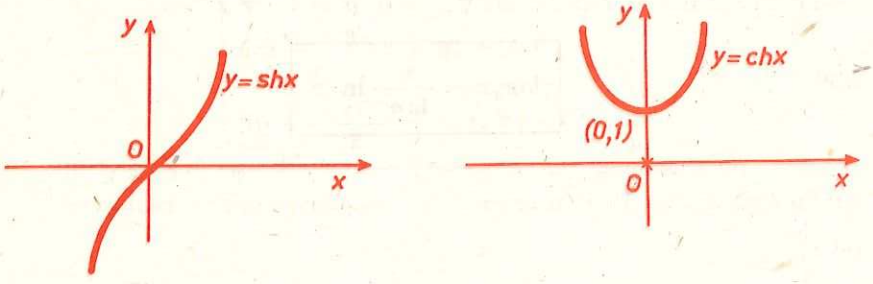


Fig. II.30

g) *Funcția logaritmică.* Fixăm din nou $a > 0$, $a \neq 1$. Se definește funcția logaritmică în baza a, $\log_a : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ ca inversa funcției exponențiale $x \mapsto a^x$. Dacă $a > 1$ (respectiv $0 < a < 1$) funcția este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare). În plus,

$$\lim_{x \to \alpha} \log_a x = \log_a \alpha, \ \forall \alpha > 0 \tag{37}$$

(limita logaritmului este egală cu logaritmul limitei).

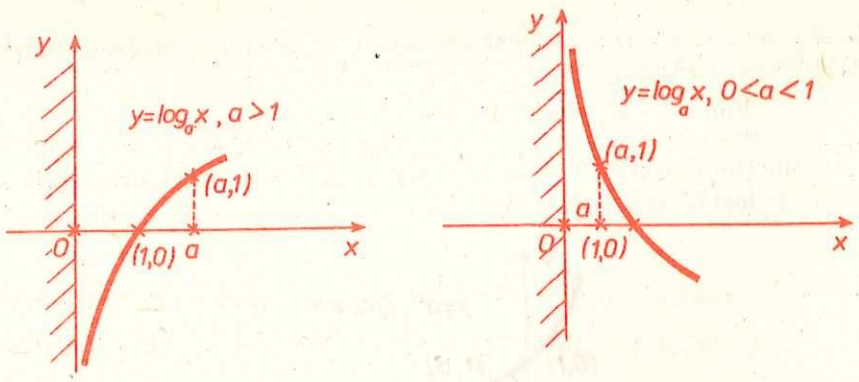


Fig. II.31

Dacă $a > 1$, avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty \text{ și } \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty, \tag{38}$$

iar dacă $0 < a < 1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = \infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$.

Graficele corespunzătoare sînt schițate în figura II.31.

Pentru $a = 10$ se obține logaritmul zecimal $\lg = \log_{10}$. Un caz particular, extrem de important, este cel al logaritmilor în baza e, numiți *logaritmi naturali* sau *neperieni* (după numele lui J. Neper, 1550—1617). Se notează ln în loc de $\log_e$, deci pentru orice $x > 0$, se pune $\ln x = \log_e x$. Aplicînd regula de schimbare a bazei, rezultă că $\forall\, a > 0$, $a \neq 1$, $\forall\, x > 0$

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x. \tag{39}$$

Remarcăm, de asemenea, că $a^x = e^{x \ln a} = 10^{x \lg a}$ $(a > 0, x \in \mathbf{R})$.

h) *Funcția putere.* Pentru orice $x > 0$ și pentru orice r real avem

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{40}$$

și în acest mod, funcția putere $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$. $g(x) = x^r$ este tocmai compunerea funcțiilor $x \mapsto u = r \ln x$ și $u \mapsto e^u$.

Mai general, dacă $f, g : D \to \mathbf{R}$ $(D \subset \mathbf{R})$ sînt funcții reale și $f > 0$ (adică $f(x) > 0$, $\forall\, x \in D$), atunci se poate defini funcția $f^g : D \to \mathbf{R}$ prin $f^g = e^{g \ln f}$. De exemplu, $x^x = e^{x \ln x}$, $\forall\, x > 0$.

În încheierea acestui punct, indicăm cîteva limite remarcabile legate de exponențiale și logaritmi. Din definiția II.7 a numărului e, se poate deduce că

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{41}$$

Făcînd schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{y}$, se poate demonstra că

(42) $$\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

De aici rezultă că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \ln e = 1.$$

De asemenea, pentru $a > 0$, $a \neq 1$, notînd $a^x - 1 = u$, avem $a^x = 1 + u$. $x \ln a = \ln(1+a)$, deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u \ln a}{\ln(1+u)} = (\ln a) \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}} = \ln a.$$

În fine, pentru orice număr real r, notînd $1 + x = 2^v$ avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \lim_{v\to 0} \frac{2^{rv} - 1}{2^v - 1} = \lim_{v\to 0} \frac{\frac{2^{rv}-1}{rv}}{\frac{2^v - 1}{v}} = r \cdot \frac{\ln 2}{\ln 2} = r.$$

Reținem așadar următoarele limite:

(43) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

(44) $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,\ a > 0;$$

(45) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r,\ \forall\, r \text{ real}.$$

Exemple

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$ De aici, $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \right)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}.$$

2) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1 + 4x + x^2}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{3x + x^2}{1+x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{3x + x^2}{1+x} \right)^{\frac{3x+x^2}{1+x} \cdot \frac{1+x}{3x+x^2} \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{3x+x^2}{(1+x)x}} = e^3.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^2)^x-1}{x}\overset{cf.(44)}{=}\ln e^2=2\ln e=2$.

4) Punînd $x=1+y$, rezultă $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[9]{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt[9]{1+y}-1}{y}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{9}}-1}{y}\overset{cf.(45)}{=}\frac{1}{9}.$$

Observație. În ultimul timp există tendința de a introduce notații noi pentru funcțiile elementare: SIN, COS, TAN ($x\longmapsto \operatorname{tg} x$), COT ($x\longmapsto \operatorname{ctg} x$), EXP ($x\longmapsto e^x$), LOG ($x\longmapsto \ln x$), SIN^{-1} ($x\longmapsto \arcsin x$), TAN^{-1} ($x\longmapsto \operatorname{arctg} x$) etc. Valorile acestor funcții pot fi calculate, cu aproximație, cu ajutorul minicalculatoarelor sau cu ajutorul unor tabele speciale.

7.2. Cazuri exceptate

Am văzut că pentru funcțiile elementare $f:D\to\mathbb{R}$ definite pe domeniul lor maxim de definiție D, avem

(46) $$\boxed{\lim_{x\to\alpha}f(x)=f(\alpha),\ \forall\,\alpha\in D}\ .$$

Cu alte cuvinte, calculul limitei lui f în punctul α revine la calculul valorii $f(\alpha)$ obținute înlocuind direct x cu α.

Aplicarea mai largă a acestei reguli poate să conducă la operații care nu au fost definite în $\overline{\mathbb{R}}$, de tipul

$$\frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0 \text{ etc.}$$

numite *cazuri exceptate*. Sînt atunci necesare transformări ale funcției de sub limită, cu respectarea strictă a proprietăților limitelor, utilizînd limitele-tip indicate mai sus. Nu există însă reguli generale și se pot face cel mult unele recomandări.

Dacă trebuie calculată o limită de forma $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(x)}{h(x)}$ și dacă $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\alpha}h(x)=0$ se spune că ne aflăm în cazul $\dfrac{0}{0}$. În această situație se recomandă simplificarea cu $x-\alpha$ sau translația $x-\alpha=y$, care conduce la limita $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{g(\alpha+y)}{h(\alpha+y)}$ etc.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{2\cos x-1}{3x-\pi}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\cos\left(\frac{\pi}{3}+y\right)-1}{3\left(\frac{\pi}{3}+y\right)-\pi}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\cos y-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y\right)-1}{3y}=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{3y}-\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin y}{3y}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Dacă avem de calculat $\lim\limits_{x\to a}[g(x)-h(x)]$ și dacă $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=\infty$, atunci se obține cazul $\infty-\infty$. În acest caz se recomandă transformarea funcției de sub limită, iar în cazul radicalilor, amplificarea eventuală cu expresia conjugată.

Exemple

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x}{x^3-1}=\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=$

$$=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{3}=1.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

În cazul $\frac{\infty}{\infty}$ se recomandă uneori scoaterea forțată a unor factori comuni. De exemplu,

3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}=1,\ \text{iar}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-1.$$

4) $$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=-5\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x^2+5x}}$$

$$=-5\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=-5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

În cazul exceptat 1^∞ se utilizează limita-standard care definește numărul e, anume $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$. De exemplu,

5) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+2x+9}{x^2+5x+3}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6-3x}{x^2+5x+3}\right)^{\frac{x^2+5x+3}{6-3x}}\right]^{\frac{6x-3x^2}{x^2+5x+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3x^2}{x^2+5x+3}}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}.$$

De asemenea, punînd $x - \frac{\pi}{4} = y$, rezultă

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{4x-\pi}} = \lim_{y\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)\right]^{\frac{1}{4y}} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}\right)^{\frac{1}{4y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\left(1+\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg} y}{2\operatorname{tg} y}}\right]^{\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} y}\cdot\frac{1}{4y}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{2y(1-\operatorname{tg} y)}} = e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{1-\operatorname{tg} y}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

În capitolul V vom da o altă regulă utilă pentru calculul limitelor (regula lui l'Hospital).

EXERCIȚII (capitolul II, § 7)

1. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)$; c) $\lim\limits_{x\to 1}(x^4-x)$; d) $\lim\limits_{x\to -1}(x^4+x)$; e) $\lim\limits_{x\to 7}(2x^2-x)$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x^2+x)$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}(-x^3+x^2)$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+8x^2)$; i) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^4+x-100)$;

j) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^3-x}$; l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{x^2-1}\right)$; m) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x}$; n) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{|2x-2|}$; o) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x^3-x}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^4-x}$; q) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+x^3}{x^4}$; r) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^3}$; s) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{|x-1|}$; t) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x-1|}$;

u) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$; v) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^4+1}}$.

2. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ și b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^m+1}{x^n+1}$ (m, n întregi >0).

3. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2-x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x}{3x^2-x}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-x}{3x^3+x+2}$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2+x}$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2}{x^2+4}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. Să se determine asimptotele următoarelor funcții reale:

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2+1},\quad f(x)=\frac{x+2}{x^2-1},\quad f(x)=\frac{x^3}{x^2-1},\quad f(x)=x-\sqrt{x^2-x},\quad f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},$$

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1},\quad f(x)=\frac{2x^2}{x^2+4x-5}.$$

5. Să se arate că dacă P, Q sînt funcții polinomiale reale și $\operatorname{gr} P - \operatorname{gr} Q = 1$, atunci funcția rațională $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ are asimptotă oblică spre $+\infty$ și spre $-\infty$ (anume dreapta $y=ax+b$ unde $ax+b$ este cîtul lui P prin Q).

6. Să se arate că funcțiile: $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $g : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos \frac{1}{x}$, $h : \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{2}{1+2k},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$, nu au limită în punctul $x = 0$.

7. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x-a}$;

($0<b<a$ constante); d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x}+x)$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2-2x})$;

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-x}-2x)$; h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{4x}$; i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\operatorname{tg} x - \sin x}{x}$; j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 2x}$;

k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$; l) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-|x|}$; m) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-|x|}$; n) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^3}$; o) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{|x|+1}{x-1}}$.

8. Să se determine limitele laterale în punctul $x = 1$ pentru funcțiile $f : D \to \mathbb{R}$ (D — domeniul maxim de definiție) următoare:

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{|x^2-1|}}$; d) $f(x) = e^{\frac{x^2-2}{x-1}}$; e) $f(x) = e^{1+\frac{2}{|x-1|}}$; f) $f(x) = \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$; g) $f(x) = \frac{|x|-1}{x-1}$; h) $f(x) = \frac{\cos \pi x + 1}{(x-1)^3}$.

9. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_2 x$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \log_2 x$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \log_2 x$; d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \log_2 \frac{x}{x-1}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x}$; f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x+1} e^{2x}$; g) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x^2}$; h) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x$.

10. Dacă f, g sînt funcții reale definite pe un interval (a, ∞), $a \in \mathbb{R}$, scriem „$f(x) \ll g(x)$ pentru $x \to \infty$“ dacă $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$. Să se arate că pentru orice funcție polinomială $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_0 > 0$, $n \geqslant 1$ avem

$$\ln x \ll P(x) \ll e^x \text{ pentru } x \to \infty.$$

11. Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$; c) $f(x) = e^{-x^2}$; d) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$; e) $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$; f) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; g) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$; h) $f(x) = \frac{x}{e^x+1}$; i) $f(x) = \frac{1}{|e^x - 1|}$; j) $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$; k) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3x-5}$; l) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$;

m) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4-1}}{x+3}$.

12. Să se calculeze limitele următoare (de tipul 1^∞):

a) $\lim\limits_{x\to 3}(13-4x)^{\frac{1}{x-3}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}\right)^x$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{-x}}$; f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2$.

13. Fie $a_n\to a$ un şir convergent de numere reale strict pozitive. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1a_2\ldots a_n)^{\frac{1}{n}}=a$.

14. Să se determine constanta $k\in\mathbf{R}$ astfel încît, pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}+k$, dreapta $y=1$ să fie asimptotă orizontală spre $+\infty$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL II

1. *Dacă a este un număr real, să se arate că şirurile $x'_n=a-\frac{1}{n}$, $x''_n=a+\frac{1}{n}$, $n\geqslant 1$ sînt convergente către a şi $x'_n<a$, $x''_n>a$, $\forall\, n\geqslant 1$.*

Soluţie. Fie $\varepsilon>0$ arbitrar fixat. Se observă că

$$|x'_n-a|=\left|-\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},\quad |x''_n-a|=\frac{1}{n}.$$

Dacă punem condiţia $\frac{1}{n}<\varepsilon$, atunci $n>\frac{1}{\varepsilon}$ şi, ca atare, alegînd N natural astfel încît $N>\frac{1}{\varepsilon}$, rezultă că $|x'_n-a|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, $|x''_n-a|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ pentru orice $n\geqslant N$. Aşadar, $x'_n\to a$, $x''_n\to a$.

2. *Să se arate că şirurile*

$$a_n=\frac{2^n}{(n!)^2}\text{ şi }b_n=2^{-\sqrt{n^2+1}}\quad(n\geqslant 1)$$

sînt mărginite, monotone şi convergente către zero.

Soluţie. Se verifică uşor că $0\leqslant a_n\leqslant 2$ şi $0\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{2}$ pentru orice $n\geqslant 1$. Apoi

$$a_{n+1}-a_n=\frac{2^{n+1}}{[(n+1)!]^2}-\frac{2^n}{(n!)^2}=\frac{2}{(n!)^2}\left[\frac{2}{(n+1)^2}-1\right]\leqslant 0,$$

adică $a_{n+1}\leqslant a_n$, şi similar $b_{n+1}\leqslant b_n$ pentru orice $n\geqslant 1$. Aşadar ambele şiruri sînt monoton descrescătoare. Deoarece $0<a_n<\frac{2^n}{n!}<\frac{1}{n}$ (pentru $n\geqslant 6$) şi $0\leqslant b_n\leqslant\frac{1}{2^n}$ (pentru $n\geqslant 1$), rezultă că $a_n\to 0$, $b_n\to 0$, aplicînd teorema II.4.

3. *Să se arate că pentru orice $a>0$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.*

Soluție. Presupunem că $a \geqslant 1$ și notăm $\sqrt[n]{a} - 1 = x_n$. Atunci, $x_n \geqslant 0$ și $a = (1 + x_n)^n \geqslant nx_n$, deci $0 \leqslant x_n \leqslant \frac{a}{n}$ și, ca atare, $x_n \to 0$, adică $\sqrt[n]{a} \to 1$ pentru $n \to \infty$.

Dacă $0 < a < 1$, atunci $\frac{1}{a} > 1$ și, ca atare, $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1$, adică $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$, deci $\sqrt[n]{a} \to 1$.

4. *Să se arate că:* a) *dacă o funcție f are limita la stînga l_s (respectiv la dreapta l_d) într-un punct $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci*

$$l_s = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right), \text{ respectiv } l_d = \lim_{n\to\infty} f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbf{N};$$

b) *dacă pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ există $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, atunci $l = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbf{N}}} f(n)$, dar nu și reciproc.*

Soluție. a) Este suficient să alegem șirul $x'_n = x_0 - \frac{1}{n}$ $\left(\text{și respectiv } x''_n = x_0 + \frac{1}{n}\right)$ și atunci $f(x'_n) \to l_s$ (respectiv $f(x''_n) \to l_d$).

b) Deoarece există $l = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, rezultă că pentru orice șir $x_n \to \infty$ (din domeniul de definiție al lui f) avem $f(x_n) \to l$. Luînd $x_n = n$, rezultă $f(n) \to l$.

Pentru partea secundă, să considerăm funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \neq 1, 2, 3, \ldots \\ \frac{1}{n}, \text{ dacă } x = n, \ n \geqslant 1 \text{ întreg.} \end{cases}$$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nu există.

5. *Să se calculeze limitele laterale în punctul $x = 2$ pentru funcțiile f, g, $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:*

$$f(x) = \frac{|x-2|}{x^2 + x + 1}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ 2x + 7, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{dacă } x < 2 \\ x^2, & \text{dacă } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Soluție. $f(2-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x) = 0$, $f(2+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} f(x) = 0$;

$$g(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} x = 2 \text{ și } g(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (2x+7) = 11;$$

$$h(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} \sin \pi x = \sin 2\pi = 0 \text{ și } h(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} x^2 = 4.$$

6. *Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} x - q, & \text{dacă } x < 1 \\ 2x + p, & \text{dacă } x > 1 \\ q, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

unde p și q sînt parametri reali. Pentru care valori ale lui p și q funcția f are limită în punctul $x = 1$? În ce caz această limită este egală cu $f(1)$?

Soluție. Avem $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-q) = 1-q$, $f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x+p) = 2+p$. Aplicînd teorema II.7, condiția ca f să aibă limită în punctul $x=1$ este ca $1-q=2+p$, adică $p+q=-1$. Apoi $f(1)=q$, deci răspunsul la întrebarea secundă se obține rezolvînd sistemul $1-q=2+p=q$, de unde $q=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{3}{2}$.

7. *Să se calculeze*

$$l_1 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1},\quad l_2 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^4}{(x^2-1)^4} \text{ și } l_3 = \lim \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

Soluție. $l_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x+1} = 0;$

$$l_2 = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^4(x+1)^4} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+1)^4} = \frac{1}{16}.$$

Ținînd cont că $\sqrt{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$, $\sqrt[3]{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$, rezultă $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ pentru orice $x \geqslant 0$, $x \neq 1$, deci

$$l_3 = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

8. *Să se determine asimptotele funcțiilor $f : D \to \mathbb{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):*

a) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$; b) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x^2-4|}$; c) $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-1}$.

Soluție. a) Funcția f este definită pe $D = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. Dreptele $x=1$, $x=-1$ sînt asimptote verticale și dreapta $y=2$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$.

b) Dreptele $x=2$, $x=-2$ sînt asimptote verticale; apoi, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, funcția nu are asimptote orizontale. Studiem existența asimptotei oblice spre $+\infty$; calculăm $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1$ și $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^3}{|x^2-4|} - x\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$. Așadar, $y=x$ este asimptota oblică spre $+\infty$. Similar, se obține că $y=x$ este asimptotă oblică și spre $-\infty$.

c) Funcția f este definită pe mulțimea $D = \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$ și $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$, $\forall x \in D$. Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală și dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală (spre $+\infty$ și spre $-\infty$).

d) Dreapta $x=1$ este asimptotă verticală; apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-1} \cdot \sin x = 0$ și $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, deci axa Ox este asimptotă orizontală (spre $+\infty$ și spre $-\infty$).

9. *Se consideră funcțiile* $f, g, h : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ definite prin

$$f(x) = \sqrt{x + 10^3} - \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}, \quad h(x) = \sqrt{x + \frac{x}{10^3}} - \sqrt{x}.$$

Să se arate că dacă $x \in [1, 10^6]$, *atunci* $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ *și totuși* $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) > \lim\limits_{x\to\infty} g(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

Soluție. Inegalitatea $h(x) \leqslant g(x)$ revine la $\sqrt{x + \frac{x}{10^3}} \leqslant \sqrt{x + \sqrt{x}}$, adică $\frac{x}{10^3} \leqslant$ $\leqslant \sqrt{x}$, adică $x \leqslant 10^6$; se probează similar faptul că $g(x) \leqslant f(x)$. Apoi, prin calcul direct, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Nu este nici o contradicție cu regula de păstrare a inegalităților prin trecere la limită, deoarece inegalitățile $h(x) \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ au loc aici doar pe un interval mărginit.

10. *Să se calculeze limitele următoare:*

$$l_1 = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \frac{1}{h}}{1 + \frac{1}{h}}; \qquad l_2 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}\right], \quad x \neq 0;$$

$$l_3 = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}, \quad x > 0; \qquad l_4 = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}, \quad x \neq 0;$$

$$l_5 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2(x+h) - \sin^2 x}{h}; \qquad l_6 = \lim_{h\to 0} (\cos h)^{\frac{1}{h^2}}$$

Soluție. $l_1 = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h-1}{h+1} = -1$ $\left(\text{sub forma inițială limita era în cazul exceptat } \frac{\infty}{\infty}\right)$; avem succesiv

$$l_2 = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2 \cdot (x+h)^2} = -\lim_{h\to 0} \frac{h + 2x}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2}{x^3} \text{ (cazul } \infty \cdot 0);$$

$$l_3 = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right);$$

$$l_4 = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right);$$

$$l_5 = \lim_{h\to 0} \frac{[\sin(x+h) - \sin x][\sin(x+h) + \sin x]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot 2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cos \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h \cdot \sin(2x + h)}{h} =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right) \cdot \lim_{h\to 0} \sin(2x + h) = 1 \cdot \sin 2x = \sin 2x.$$

În sfîrșit, limita l_6 este în cazul exceptat 1^∞, și este necesară prelucrarea expresiei de sub limită:

$$l_6 = \lim_{h\to 0}(1+\cos h-1)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0}\left[\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{h}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}} = e^{\lim\limits_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2}} = e^{-\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{2\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

11. *Să se studieze convergența șirurilor* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *definite prin* $a_0=1$ *și prin următoarele relații de recurență:*

a) $a_{n+1} = 1 + a_n^2$, $n \geqslant 0$;

b) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$, $n \geqslant 0$.

Soluție. a) Șirul $(a_n)_{n\geqslant 0}$ este monoton crescător: $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$, deci $a_{n+1} > a_n$, $n \geqslant 0$. Șirul este deci monoton și, ca atare, are o limită l. Dacă această limită ar fi finită, ar rezulta $l = 1 + l^2$, ceea ce este absurd. Deci $\lim a_n = \infty$.

b) Avem $a_{n+1} > a_n$, $n \geqslant 0$, așa cum se verifică imediat prin inducție. Raționînd ca mai sus, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

12. *Să se arate că dacă* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *este un șir convergent, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, *dar reciproca este falsă.*

Soluție. Presupunem că $a_n \to a$. Atunci $|a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leqslant |a_{n+1} - a| + |a_n - a|$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$, conform corolarului 2 al teoremei II.4.

Pentru a vedea că reciproca este falsă este suficient să considerăm exemplul $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ (din exercițiul 14, de la pag. 74).

13. *Să se determine* $a \in \mathbf{R}$ *astfel încît funcția* $f : \mathbf{R}\setminus\{1\} \to \mathbf{R}$ *definită prin*

$$f(x) = \begin{cases} a\ln(3-x), & \text{dacă } x < 1 \\ \dfrac{2^x - 2}{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 1$.

Soluție. $f(1-0) = \lim\limits_{x\to 1,\, x<1} a\ln(3-x) = a\ln 2$, $f(1+0) = \lim\limits_{x\to 1,\, x>1}\frac{2^x-1}{x-1} = \lim\limits_{y\to 0,\, y>0}\frac{2^{1+y}-2}{y} = 2\lim\limits_{y\to 0,\, y>0}\frac{2^y-1}{y} = 2\ln 2$. Condiția din enunț revine la $f(1-0) = f(1+0)$, deci $a = 2$.

14. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție periodică neconstantă. Să se arate că* f *nu are limită în punctele* ∞, $-\infty$.

Soluție. Conform ipotezei există $T > 0$ astfel încît $f(x + T) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Deoarece f este neconstantă, există $a, b \in [0, T]$ astfel încît $f(a) \neq f(b)$. Considerăm șirurile $x'_n = a + nT$, $x''_n = b + nT$, $n \geqslant 0$. Evident, $x'_n \to \infty$, $x''_n \to \infty$ și $f(x'_n) = f(a + nT) = f(a)$, $f(x''_n) = f(b + nT) = f(b)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x''_n)$. Așadar, f nu are limită în punctul ∞. Se procedează similar pentru $-\infty$.

Observație. În particular, funcțiile cos, sin nu au limită în punctele ∞, $-\infty$.

15. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x(1 + 2 \sin x)$ nu are limită spre $+\infty$.

Soluție. $x'_n = n\pi \to \infty$, $x''_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$ și $f(x'_n) = e^{n\pi} \to \infty$, $f(x''_n) \to -\infty$, deci $\lim\limits_{h\to\infty} f(x)$ nu există.

16. Fie $f, g : D \to \mathbf{R}$ *două funcții și* $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$ *un punct de acumulare pentru* D. *Presupunem că există* $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = 0$ *și că* g *este mărginită într-o vecinătate a punctului* α. *Să se arate că* $\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0$. *Ca o aplicație să se arate că*: a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^k \sin \frac{1}{x} = 0$ $(k > 0$, real); c) $\lim\limits_{n\to-\infty} e^x(1 + 2 \sin x) = 0$.

Soluție. Fie $x_n \to \alpha$ un șir oarecare de puncte din $D \setminus \{\alpha\}$, deci $f(x_n) \to 0$. Deoarece funcția g este mărginită într-o vecinătate U a lui α, și cum $x_n \in U$ pentru orice $n \geqslant N$ (N convenabil), rezultă că sirul $(g(x_n))_{n\geqslant N}$ este mărginit, deci

$$(fg)(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n) \to 0, \text{ adică } \lim_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0.$$

a) Luăm $D = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$, $\alpha = \infty$.

b) Luăm $D = (0, 1)$, $f(x) = x^k$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, $\alpha = 0$.

c) Luăm $D = (-\infty, 0)$, $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + 2 \sin x$, $\alpha = -\infty$.

Capitolul III
FUNCȚII CONTINUE

Ideea de continuitate a unei funcții s-a desprins din reprezentările intuitive asupra proceselor în desfășurarea cărora nu apar salturi, ruperi. Noțiunea matematică de continuitate cere o definiție precisă, care să conducă prin raționamente corecte la degajarea proprietăților funcțiilor continue, importante în aplicații și în dezvoltări teoretice ulterioare. Conceptul de funcție continuă s-a definit relativ tîrziu și este datorat în principal lui A. Cauchy (1789—1857), B. Bolzano (1781—1848) și G. Darboux (1842—1917).

§ 1. Funcții continue într-un punct; funcții continue pe o mulțime

1.1. Punerea problemei

Considerăm cîteva exemple.

1) Presupunem că pe o axă se mișcă uniform un mobil care la momentul $t = 0$ se află în origine. Dacă viteza, presupusă constantă, a mobilului este v, atunci notînd cu $s(t)$ distanța parcursă de mobil în timpul t, rezultă că $s(t) = v \cdot t$, $\forall\, t \geqslant 0$. Graficul acestei funcții $s : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ este indicat în figura III.1.

2) Considerăm funcția $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < t_0 \\ U_0, & \text{dacă } t \geqslant t_0 \end{cases}, \quad t_0 \text{ fixat},$$

avînd graficul în figura III.2. ($U_0 > 0$ fiind o constantă). Reamintim că săgețile corespund intervalelor deschise sau semideschise.

În exemplul 1 funcția s nu are salturi, graficul este „neîntrerupt". În exemplul 2 funcția U are un salt, sau o discontinuitate, cum se spune, în punctul t_0.

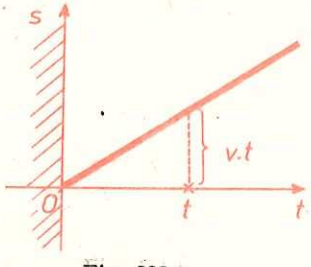


Fig. III.1

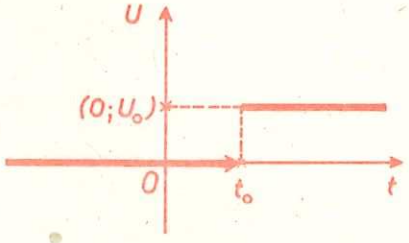


Fig. III.2

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \neq 2 \\ 3, & \text{dacă } x = 2 \end{cases}$$

are limită în orice punct, inclusiv în punctul $x = 2$, dar intuitiv ea nu poate fi considerată continuă în punctul $x = 2$ (figura III.3).

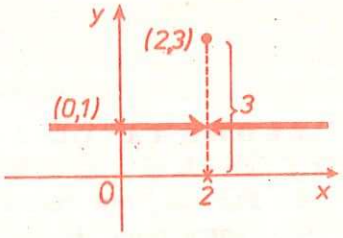


Fig. III.3

4) Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este o funcție și $a \in E (E \subset \mathbf{R})$ este un punct fixat, calculul lui $f(a)$ poate prezenta mari dificultăți în unele cazuri. Din acest motiv este citeodată util de a se proceda în modul următor: se consideră o aproximare $b \simeq a$, $b \in E$ și se calculează $f(b)$. Întrebarea naturală care se pune este: aproximează oare $f(b)$ pe $f(a)$? Dacă da, putem evalua eroarea comisă? Sau putem alege o aproximare $b \simeq a$ suficient de bună astfel încît eroarea $|f(b) - f(a)|$ să fie mai mică decît un număr pozitiv arbitrar fixat dinainte?

Răspunsul la aceste întrebări este afirmativ dacă f verifică așa-numita proprietate de a fi continuă în punctul a, proprietate ce va fi definită în cele ce urmează.

1.2. Noțiunea de funcție continuă într-un punct

Vom fixa în cele ce urmează următoarele entități:

a) o funcție reală $f : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$;

b) un punct a care aparține lui E.

Ne va interesa nu numai comportarea lui f în vecinătatea punctului a, dar și în punctul a.

DEFINIȚIA III. 1. Funcția f se numește continuă în punctul a dacă pentru orice vecinătate V a punctului $f(a)$ există o vecinătate U a punctului a, astfel încît din faptul că $x \in U \cap E$ să rezulte $f(x) \in V$.

Dacă funcția f nu este continuă în punctul a ea se numește **discontinuă** în acel punct. Dacă a este un punct izolat al lui E (adică există o vecinătate U a lui a astfel încît $U \cap E = \{a\}$), atunci condiția anterioară este îndeplinită automat și f rezultă continuă în punctul a.

Să presupunem acum nu numai că $a \in E$, dar că a este și un punct de acumulare pentru E (deci există un șir de puncte $a_n \in E \setminus \{a\}$, astfel încît $a_n \to a$). Atunci definiția III.1 este echivalentă (folosind definiția II.4) cu faptul că limita funcției f în punctul a există și este egală cu $f(a)$, adică

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{1}$$

În cazul cînd $E = [\alpha, \beta]$, faptul că f este continuă în punctul α revine la aceea că există limita $\lim_{x \to \alpha,\ x > \alpha} f(x)$ și aceasta este egală cu $f(\alpha)$. În mod similar, f este continuă în punctul β dacă și numai dacă $\lim_{x \to \beta,\ x < \beta} f(x)$ există și este egală cu $f(\beta)$.

Dacă funcția f este continuă în fiecare punct al mulțimii E, atunci ea se numește **continuă pe mulțimea E.**

Reţinem că pentru a pune problema continuităţii sau discontinuităţii unei funcţii într-un punct este necesar ca funcţia să fie definită în acel punct.

Un rezultat important îl consituie

TEOREMA III. 1 *(de caracterizare a continuităţii într-un punct).* **Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi $a \in E$. Sînt echivalente următoarele afirmaţii:**

1°. Funcţia f este continuă în punctul a;

2°. Pentru orice şir $x_n \to a$, $x_n \in E$, $n \geqslant 0$, şirul $(f(x_n))_{n \geqslant 0}$ este convergent şi are limita $f(a)$;

3°. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ depinzînd de ε astfel încît din faptul că $|x - a| < \delta$, $x \in E$ să rezulte $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Dacă a este un punct izolat al mulţimii E, atunci afirmaţiile teoremei sînt verificate întotdeauna. Dacă a nu este un punct izolat al mulţimii E, demonstraţia repetă pe cea dată la teorema II.6, pag. 53, 55 (echivalenţa condiţiilor a, b, c), înlocuind l cu $f(a)$, şi nu o vom relua aici.

Avantajul de a dispune de mai multe proprietăţi echivalente constă în faptul că unele rezultate privind funcţiile continue se demonstrează mai simplu utilizînd una sau alta din caracterizările pe care le avem acum la îndemînă. Afirmaţia 3° se mai poate enunţa astfel: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît de îndată ce x este o δ-aproximare pentru a, $f(x)$ să fie o ε-aproximare a lui $f(a)$.

Să remarcăm că proprietatea de continuitate a unei funcţii într-un punct este locală, depinzînd doar de valorile ei într-o vecinătate a punctului.

O funcţie poate să fie continuă într-un punct a şi discontinuă într-un punct oricît de apropiat de a.

Un alt fapt remarcabil îl constituie proprietatea unei funcţii continue de „păstrare a semnului pe o vecinătate", anume: **Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este continuă în a şi $f(a) > 0$ (respectiv $f(a) < 0$), atunci există o vecinătate U a punctului a astfel încît $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$) pentru orice $x \in U \cap E$.** Într-adevăr, să notăm $\lambda = f(a)$ şi să presupunem $\lambda > 0$; alegînd vecinătatea $V = \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right)$ a punctului λ, există o vecinătate U a lui a astfel încît pentru orice $x \in U \cap E$ să avem $f(x) \in V$, adică $f(x) > \frac{\lambda}{2} > 0$ (se procedează similar dacă $\lambda < 0$).

Presupunem că viteza unui mobil este funcţie continuă de timp. Dacă este strict pozitivă la un moment t_0, ea rămîne strict pozitivă într-o vecinătate a lui t_0 (în particular, mobilul nu poate fi oprit instantaneu, ceea ce explică de ce proprietatea anterioară este numită proprietatea de inerţie a funcţiilor continue).

Înainte de a trece la exemple, stabilim un criteriu util de continuitate, folosind limitele laterale. Fie $f : E \to \mathbf{R}$ şi $a \in E$. Dacă în punctul a există limita la stînga $f(a - 0)$ şi în plus $f(a - 0) = f(a)$, atunci se spune că f este *continuă la stînga* în punctul a. În mod similar, dacă există $f(a + 0)$ şi $f(a + 0) = f(a)$, atunci funcţia f se numeşte *continuă la dreapta* în a.

Are loc un rezultat analog teoremei III.1 pentru funcțiile continue la dreapta (respectiv la stînga), pe care nu-l mai explicităm și care se demonstrează (cu modificări evidente) asemănător teoremei III.1.

Trebuie remarcat că, dacă $E = [\alpha, \beta]$, atunci continuitatea funcției f în punctul α (respectiv β) este echivalentă cu continuitatea la dreapta în punctul α (respectiv la stînga în punctul β) a funcției f. Se poate întîmpla ca f să fie continuă la stînga în α fără a fi continuă la dreapta, sau invers. De exemplu, funcția $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ este continuă la stînga în punctul $a = 1$, dar nu este continuă la dreapta în acel punct. Dacă însă f este continuă și la stînga și la dreapta în punctul a, atunci, raționînd ca la teorema II.7, rezultă condiția (1) îndeplinită și deci f este continuă în a, ceea ce arată coerența definițiilor date.

Așadar, dacă pentru o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ și pentru un punct $a \in E$, care este punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, a)$ și pentru $E \cap (a, \infty)$, există $f(a - 0)$ și $f(a + 0)$, atunci

f este continuă în a dacă și numai dacă $f(a - 0) = f(a + 0) = f(a)$.

Observație. Se poate pune următoarea întrebare: dacă $g : E \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe E și dacă $b \notin E$, există sau nu o funcție $G : E \cup \{b\} \to \mathbf{R}$ astfel încît $G(x) = g(x)$, $\forall\, x \in E$ și G să fie continuă în punctul b? În caz afirmativ, se spune că g este *prelungită prin continuitate în punctul* b. Remarcăm că dacă există și este finită limita $l = \lim\limits_{x \to b} g(x)$, atunci definind $G(b) = l$, funcția G prelungește funcția g prin continuitate în punctul b.

Dacă o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ nu este continuă într-un punct $a \in E$, deși limitele laterale în a există și sînt finite, atunci se spune că a este un *punct de discontinuitate de prima speță* pentru funcția f; punctele de discontinuitate care nu sînt de prima speță se numesc *de speța a doua*. Se poate arăta că *discontinuitățile unei funcții monotone pot fi numai de prima speță.*

Exemple

1) Funcțiile polinomiale, raționale, trigonometrice, exponențiale etc. sînt continue pe orice interval pe care sînt definite. De exemplu, funcțiile $f, g, h, \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x + 7$, $g(x) = \sin 2x$, $h(x) = e^x$ sînt continue pe $\mathbf{R}$, iar funcția $u : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}$, $u(x) = \sqrt{-x}$ este continuă pe intervalul $(-\infty, 0]$.

2) Funcția-modul $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, este continuă în punctul $a = 0$, deoarece $f(a - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-x) = 0$, $f(a + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0$ și $f(a) = |0| = 0$.

Ca un alt exemplu, studiem continuitatea funcției $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1 \\ 2x + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$$

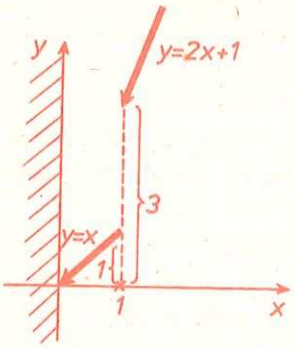


Fig. III.4

Pe intervalul deschis $(0, 1)$ avem $f(x) = x$ și f este continuă, iar pe intervalul $(1, \infty)$, $f(x) = 2x + 1$ este, de asemenea, continuă. Rămîne de studiat continuitatea în punctul $x = 1$. Dar $f(1-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} x = 1$, $f(1+0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x+1) = 3$ și $f(1) = 1$. Deci f nu este continuă în punctul $x = 1$ (acest punct este un punct de discontinuitate de prima speță pentru f). Graficul lui f este indicat în figura III.4.

3) Reluăm exemplele date în 1.1. În exemplul 1, $s(t) = v \cdot t$ este funcție elementară pentru $t > 0$, deci este funcție continuă. În punctul $t = 0$ ea este, de asemenea, continuă. În exemplul 2, funcția U este constantă, deci continuă pe fiecare din intervalele $(-\infty, t_0)$, (t_0, ∞), iar în punctul $t = t_0$ este discontinuă (de prima speță). În fine, funcția f avînd graficul în figura III.3 este continuă pe mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, iar în punctul $a = 2$ avem $f(2-0) = f(2+0) = 1$ în timp ce $f(2) = 3$, deci f nu este continuă în acest punct (avînd o discontinuitate de prima speță).

4) Considerăm funcția $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}.$$

Deoarece $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, ea nu poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 1$. În schimb, funcția $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 1 \\ 2 - x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 1$ (definind $g(1) = 1$) (figura III.5).

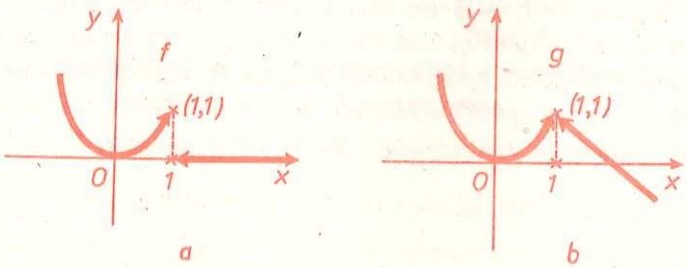


Fig. III.5

5) Dăm un exemplu de funcție care nu este continuă în nici un punct, anume funcția lui Dirichlet $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

Graficul lui φ nu poate fi trasat.

Dacă $a \in \mathbb{Q}$, alegem $x'_n \to a$ (cu toți $x'_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$), atunci $\varphi(x'_n) = 0 \to 0$ pentru $n \to \infty$, în timp ce $\varphi(a) = 1$. Similar, dacă $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alegem $x''_n \to a$ (cu toți $x''_n \in \mathbb{Q}$) și atunci $\varphi(x''_n) = 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x''_n) = 1$, în timp ce $\varphi(a) = 0$. Așadar, φ nu este continuă în nici un punct $a \in \mathbb{R}$. Toate punctele dreptei reale sînt discontinuități de speța a doua pentru φ.

1.3. Operații cu funcții continue

TEOREMA III. 2. Fie $f, g : E \to \mathbf{R}$ $(E \subset \mathbf{R})$ funcții continue într-un punct $a \in E$, respectiv pe E. Atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, fg sînt continue în a, respectiv pe E; dacă $g(a) \neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în a [respectiv pe $E \setminus \{x \in E \mid g(x) = 0\}$].

Demonstrație. Conform observației făcute după definiția III.1, ne vom ocupa doar de cazul în care a este punct de acumulare al mulțimii E. Conform ipotezei, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ și $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Atunci

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a),$$

adică $\lim\limits_{x \to a} (f \pm g)(x) = (f \pm g)(a)$ și astfel am probat relația (1) din definiția III.1.

Similar se procedează pentru fg și $\frac{f}{g}$.

Exemple

1) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x + x^2$ este continuă pe $\mathbf{R}$ ca sumă a două funcții continue.

2) Funcția $f(x) = \operatorname{tg} x$ este continuă pe intervalul $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru că este cîtul $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ a două funcții continue și numitorul nu se anulează pe I.

(De altfel, în ambele cazuri funcțiile considerate sînt elementare.)

3) Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este continuă și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci λf este continuă (ca produsul dintre f și o funcție constantă). Orice funcție polinomială P, $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ este continuă pentru că este o sumă finită de funcții continue, anume $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot (1_{\mathbf{R}})^k$.

TEOREMA III. 3. Fie $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to \mathbf{R}$ $(E_1, E_2 \subset \mathbf{R})$ două funcții reale și $h = g \circ f$ funcția lor compusă. Dacă f este continuă într-un punct $a \in E_1$ și g este continuă în punctul $b = f(a)$, atunci h este continuă în punctul a.

Dacă f este continuă pe E_1 și g continuă pe E_2, atunci h este continuă pe E_1.

Demonstrație. Fie orice șir $x_n \to a$ în E_1. Trebuie arătat că $h(x_n) \to h(a)$. Dar $f(x_n) \to b = f(a)$ în E_2, deoarece f este continuă în a și mai departe, $g(f(x_n)) \to g(b)$, deoarece g este continuă în b, adică $h(x_n) \to g(b) = g(f(a)) = h(a)$.

Ultima parte a enunțului este o consecință a primei părți.

Cu aceeași demonstrație se poate stabili o proprietate mai generală, anume: dacă a este un punct de acumulare pentru E_1 și dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $b \in E_2$, iar g este continuă în b, atunci există $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$. Plusul de

generalitate este dat de faptul că punctul a poate să nu aparţină lui E_1. Relaţia anterioară se mai scrie

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

şi se citeşte: *orice funcţie continuă comută cu limita.*

Considerăm, de asemenea, următorul caz: fie a punct de acumulare al mulţimii E_1 (dar a poate să nu aparţină lui E_1) şi fie $\lim_{x\to a} f(x) = b$, b fiind punct de acumulare al mulţimii E_2; dacă există o vecinătate V a lui a astfel încît pentru $x \in (V \cap E_1) \setminus \{a\}$, $f(x) \neq b$ şi dacă $\lim_{y\to b} g(y)$ există (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci există $\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y)$.

Demonstraţia se face exact ca mai înainte.

Exemple

1) Luînd $g(u) = e^u$, rezultă $\lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to a} f(x)}$ şi pentru $g = \sin f(x)$, $\lim_{x\to a} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to a} f(x)$ etc.

2) Funcţia $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(x) = e^{-x^2}$ este continuă pe $\mathbf{R}$, deoarece este obţinută prin compunerea funcţiilor continue $x \longmapsto u = -x^2$ şi $u \longmapsto e^u$.

3) Considerăm $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(y) = \ln y$, $a = \infty$.

Atunci $\lim_{x\to\infty} \ln \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} \ln y = -\infty$.

Teoremele III.2, III.3 se extind la sume, produse, compuneri ale unui număr finit oarecare de funcţii continue. De asemenea, dacă f, g sînt continue pe o mulţime E, atunci se pot considera funcţiile, definite în I.2.2:

$$|f| : E \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto |f(x)|;$$
$$\max(f, g) : E \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \max(f(x), g(x));$$
$$\min(f, g) : E \to \mathbf{R}, \qquad x \longmapsto \min(f(x), g(x)).$$

Teorema care urmează arată că aceste funcţii sînt, de asemenea, continue.

TEOREMA III. 4. Dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sînt funcţii continue în punctul $a \in E$ (respectiv pe mulţimea E), atunci $|f|$, $\max(f, g)$ şi $\min(f, g)$ au aceeaşi proprietate.

Demonstraţie. Funcţia $|f|$ este compunerea $g \circ f$ a funcţiilor continue $f : E \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ unde $g(x) = |x|$ este funcţia-modul, deci $|f| = f \circ g$ este continuă; apoi, este suficient să observăm că $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ şi $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.

De remarcat că dacă $|f|$ este funcție continuă, nu rezultă că f are această proprietate, așa cum arată exemplul următor:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ -1, \text{ dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}, \text{ unde } |f| = 1.$$

EXERCIȚII (capitolul III, § 1)

1. a) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ este continuă în punctele $x = 1$ și $x = -5$.

b) Să se arate că funcția $f : (-\infty, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2 - x}$ este continuă la stînga în punctul $x = 2$.

2. Fie $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să se arate că există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice x cu $|x - 1| < \delta$ să avem $|f(x) - 1| < \frac{1}{10}$; rezultă de aici că f este continuă în punctul $x = 1$?

3. Care din funcțiile următoare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sînt continue pe $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x - 1|$;

b) $f(x) = x + |x|$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x < 0 \\ 2x + 1, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$;

d) $f(x) = x^3 - \sqrt{x^2 + 1}$;

e) $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$;

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, \text{ dacă } x \neq 0 \\ 2, \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$;

g) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$;

h) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$?

4. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \text{ este rațional} \\ 2x, \text{ dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}; \qquad f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încît funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ dacă } x \leqslant 3 \\ ax, \text{ dacă } x > 3 \end{cases}$ să fie continuă în punctul $x = 3$.

6. Să se determine constantele reale a și b astfel încît funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, \text{ dacă } x \leqslant 2 \\ ax + b, \text{ dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie continuă pe $\mathbb{R}$ și, în plus, să existe $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încît $|f(x) - x^2| \leqslant 2|x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $f(0) = 0$ și că f este continuă în origine.

8. Să se arate că funcțiile

$$f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x\ , & \text{dacă } x < 0 \\ 2 - x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases},$$

$$g : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R},\ g(x) = \begin{cases} x\ , & \text{dacă } x < 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

nu pot fi prelungite prin continuitate în punctul $x = 0$.

9. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}\ , & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0\ , & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se arate că:

a) în orice vecinătate a originii există puncte unde f se anulează și puncte unde f ia valoarea 1;

b) pentru orice $A \in [-1, 1]$ există un șir de puncte $x_n \to 0$ astfel încît $f(x_n) \to A$;

c) nu există $f(0 - 0)$, $f(0 + 0)$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța a doua pentru f. Să se schițeze graficul lui f.

10. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}\ , & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0\ , & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$. Să se arate că:

a) f este continuă pe întreg $\mathbf{R}$;

b) în nici o vecinătate a originii, funcția f nu este monotonă.

11. Funcția $\rho\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \rho(x) = \left[x + \dfrac{1}{2}\right]$ poartă numele de „funcția de rotunjire".

a) Să se trasezè graficul acestei funcții și să se indice punctele ei de discontinuitate.

b) Să se arate că „funcția dinte" $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \varphi(x) = |\rho(x) - x|$ are proprietățile următoare: $\varphi(x) = |x|$ pentru $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, φ este periodică de perioadă 1, φ este continuă: să se traseze apoi graficul funcției φ.

12. Să se studieze continuitatea și să se traseze graficul pentru funcțiile următoare ($n \in N$):

a) $f : (-1, 1) \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n$; b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{nx}}{1 + e^{nx}}$;

c) $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x}{x^{2n} + 1}$; d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx}{1 + |nx|}$.

13. Să se dea exemplu de două funcții reale f, g discontinue pe un interval I astfel încît $f + g$ și fg să fie continue pe I.

14. Să se arate că funcția $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ poate fi prelungită prin continuitate în punctul $x = 0$. Aceeași proprietate o are funcția $\psi(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ dar nu și funcția $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$.

§ 2. Proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval

Funcţiile continue pe intervale posedă unele proprietăţi generale care vor fi extrem de utile în continuare.

2.1. Proprietăţi de mărginire

În general, o funcţie continuă nu este mărginită. De exemplu, funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ nu este mărginită superior. Ea este definită pe un interval nemărginit. Dar şi funcţia continuă $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ nu este mărginită chiar dacă este definită pe un interval mărginit.

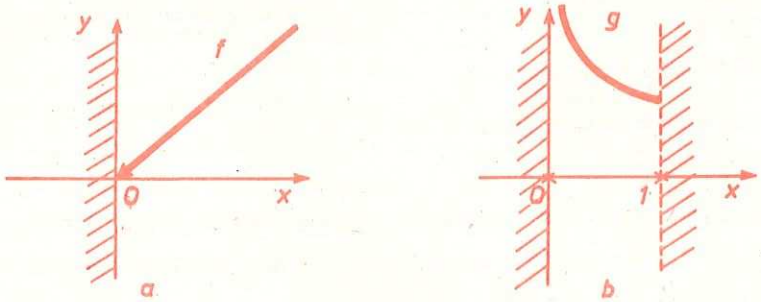


Fig. III.6

Să presupunem că $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită şi fie m, M marginile lui f, $m = \inf_{x \in D} f(x)$ şi $M = \sup_{x \in D} f(x)$.

Se spune că *f îşi atinge marginile pe D* dacă există un punct $\alpha \in D$ astfel încît $m = f(\alpha)$ şi un punct $\beta \in D$ astfel încît $M = f(\beta)$. Pentru funcţia continuă $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$, marginea inferioară este $m = 0$ şi nu este atinsă pentru că nu există $\alpha \geqslant 0$ astfel încît $e^{-\alpha} = 0$. Similar, pentru funcţia $g(x) = 1 - f(x)$, nu este atinsă marginea superioară $M = 1$.

Are loc totuşi următorul rezultat fundamental, iar exemplele anterioare arată că este esenţială condiţia de compactcitate pusă intervalului de definiţie.

TEOREMA III. 5. *(teorema lui Weierstrass de mărginire).* **Orice funcţie continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile.**

Demonstraţie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ o funcţie continuă.

Arătăm mai întîi că f este mărginită. Presupunem, prin absurd, că f nu ar fi mărginită, şi pentru a fixa ideile presupunem că f nu este mărginită superior. Atunci, rezultă că există un şir $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de puncte din $[a, b]$, cu proprietatea că $f(x_n) = y_n \to \infty$. Şirul $(x_n)_{n \geqslant 0}$ fiind conţinut în $[a, b]$ este însă mărginit, deci aplicînd lema lui Cesaró (pag. 47) deducem existenţa unui subşir convergent $(x_{k_n})_{n \geqslant 0}$ către un punct u care în mod necesar aparţine

lui $[a, b]$. Funcția f este continuă în punctul u, deci $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(u)$, dar șirul $(y_{k_n})_{n\geq 0} = (f(x_{k_n}))_{n\geq 0}$ ca subșir al unui șir, anume $(y_n)_{n\geq 0}$ ce tinde la infinit, va tinde el însuși la infinit, adică $f(u) = \infty$, ceea ce este absurd căci funcția f are valori în $\mathbf{R}$. f este mărginită superior. În mod similar se tratează cazul în care f ar fi presupusă nemărginită inferior.

Așadar, am demonstrat că f este mărginită. Fie m, M marginile lui f pe intervalul $I = [a, b]$. Arătăm că există $\alpha \in I$ astfel încît $f(\alpha) = M$. În caz contrar, am avea $f(\alpha) \neq M$ pentru orice $\alpha \in I$ și, ca atare, funcția pozitivă $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ este continuă pe I. Ea rezultă atunci mărginită, adică există $M_1 > 0$ astfel încît

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq M_1, \text{ pentru orice } x \in I.$$

De aici rezultă $f(x) \leq M - \dfrac{1}{M_1}$, $\forall\, x \in I$, ceea ce contrazice faptul că $M = \sup_{x\in I} f(x)$ (pentru că $M - \dfrac{1}{M_1}$ ar fi atunci un majorant pentru valorile lui f și, ca atare, M nu ar fi cel mai mic majorant al acestora).

Se arată similar că marginea inferioară m este atinsă.

Exemple

1) Funcția $f : [0, 3] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x - x^2$ este continuă (fig. III.7, *a*); evident $m = 0 = f(0)$ și $M = \dfrac{9}{4} = f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ și am verificat direct că f își atinge marginile. Restricția lui f la intervalul deschis $(0, 3)$ nu își atinge marginea inferioară.

2) Funcția continuă $g : (0, 1) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$ este mărginită, dar nu își atinge nici una din margini pe intervalul deschis $(0, 1)$ (fig. III.7, *b*).

3) Dacă $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție monoton crescătoare, atunci $m = h(a)$, $M = h(b)$, adică marginile sînt atinse la capetele intervalului. Similar, dacă h este monoton descrescătoare, avem $m = h(b)$, $M = h(a)$ (fără a mai fi nevoie de ipoteza de continuitate a lui f).

4) Trebuie remarcat că punctele în care funcția f își atinge marginile nu sînt neapărat unice. În exemplul 1, $m = f(0) = f(3)$, dar se pot da ușor exemple de funcții continue neconstante avînd marginile atinse chiar într-o infinitate de puncte.

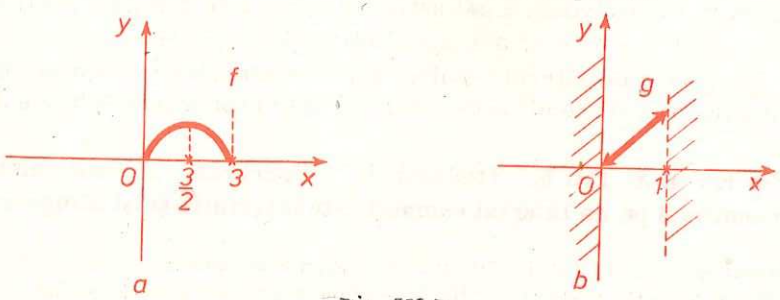


Fig. III.7

Presupunînd viteza unui automobil continuă, ca funcție de timp, din teorema III.5 rezultă că în orice interval de timp I compact există o cea mai mare și o cea mai mică valoare a vitezei (extremele globale ale vitezei pe I).

2.2. Proprietatea valorilor intermediare (a lui Darboux)

O proprietate a funcțiilor continue care apare evidentă din punct de vedere intuitiv și poate părea caracteristică funcțiilor continue (ceea ce nu este adevărat) este aceea de a „nu sări valori".

DEFINIȚIA III. 2. Fie I un interval. Se spune că o funcție $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe intervalul I dacă, pentru orice puncte $x_1 < x_2$ din I și oricare ar fi numărul c situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, există cel puțin un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(\xi) = c$.

Cu alte cuvinte, o dată cu valorile luate în două puncte ale intervalului I, funcția $x \mapsto f(x)$ ia și toate valorile intermediare, atunci cînd x parcurge intervalul dintre cele două puncte. Trebuie remarcat că această proprietate nu este legată de compacitatea intervalului de definiție.

Intuitiv, dacă f este o funcție continuă pe un interval $[a, b]$ și $f(a) \neq f(b)$, atunci orice dreaptă $y = c$ situată între dreptele $y = f(a)$, $y = f(b)$ intersectează graficul neîntrerupt al lui f cel puțin o dată (figura III.8). Dar aceasta nu poate constitui o demonstrație.

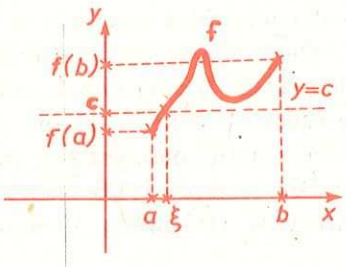


Fig. III.8

TEOREMA III. 6 *(a valorilor intermediare)*. **Orice funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval.**

Demonstrație. Stabilim în prealabil o lemă, importantă și prin ea însăși.

LEMĂ: Dacă $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă și $\varphi(a) \cdot \varphi(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$ astfel încît $\varphi(\xi) = 0$.

Demonstrația lemei. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $\varphi(a) < 0$ și $\varphi(b) > 0$. Fie $A = \{x \in [a, b] \mid \varphi(x) \leqslant 0\}$. Mulțimea A nu este vidă (căci, conform ipotezei, $\varphi(a) < 0$, deci $a \in A$) și este mărginită (căci $A \subset [a, b]$). Atunci, în conformitate cu axioma lui Cantor, există $\xi = \sup A$. Desigur, $\xi \in [a, b]$. Afirmăm că $\varphi(\xi) = 0$. Într-adevăr, sau $\xi \in A$ sau $\xi \notin A$.

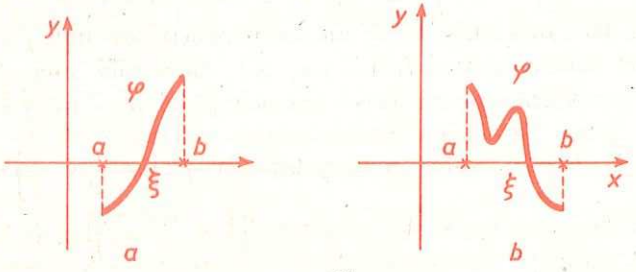


Fig. III.9

Dacă $\xi \notin A$, atunci $\varphi(\xi) > 0$ și, conform ex. 5 pag. 46, există un șir $x_n \in A$, $x_n \to \xi$; avem $\varphi(x_n) \leqslant 0$ și φ fiind continuă, $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$. Rezultă că $\varphi(\xi) \leqslant 0$, contradicție. Rămîne cazul $\xi \in A$, deci $\varphi(\xi) \leqslant 0$. Dacă $\varphi(\xi) < 0$, atunci din continuitatea lui φ în punctul ξ rezultă existența unei vecinătăți U a punctului ξ astfel ca $x \in U$ să implice $\varphi(x) < 0$, deci există în particular puncte $x > \xi$ pentru care $\varphi(x) < 0$ (deci $x \in A$), ceea ce contrazice faptul că $\xi = \sup A$. Așadar, în mod necesar, $\varphi(\xi) = 0$.

Trecem la demonstrația propriu-zisă a teoremei.

Fie deci $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă, $x_1 < x_2$ puncte oarecare din intervalul I și c un număr situat între $f(x_1)$ și $f(x_2)$. Considerînd funcția $\varphi : I \to \mathbf{R}$, definită prin $\varphi(x) = f(x) - c$, avem $\varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) = (f(x_1) - c) \cdot (f(x_2) - c) \leqslant 0$, deci, conform lemei, există $\xi \in [x_1, x_2]$ astfel încît $\varphi(\xi) = 0$, adică $f(\xi) = c$, și demonstrația teoremei este încheiată.

Dacă viteza unui automobil este continuă ca funcție de timp și dacă la momentele $t_1 < t_2$ viteza automobilului are valori distincte $v_1 \neq v_2$, atunci teorema III.7 arată că orice viteză intermediară (între v_1 și v_2) este atinsă la un anumit moment $t \in (t_1, t_2)$.

Din teorema III.6 rezultă că funcțiile continue transformă intervalele în intervale. Mai precis, demonstrăm următorul

COROLAR. Fie $I \subset \mathbf{R}$ un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă pe I. Mulțimea $J = f(I)$ este, de asemenea, un interval.

Demonstrație. Avem de arătat că dacă α, β aparțin lui J și $\alpha < c < \beta$, atunci $c \in J$. Dacă $\alpha = f(x_1)$, $\beta = f(x_2)$ cu $x_1, x_2 \in I$ și $x_1 \neq x_2$. Dar, o dată cu valorile α, β, funcția f ia și valoarea intermediară c, adică există ξ între x_1 și x_2 astfel încît $f(\xi) = c$, deci $c \in J$.

Cu ajutorul corolarului de mai sus se demonstrează riguros surjectivitatea unor funcții elementare. De exemplu: fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$; din faptul că $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ și $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ și din continuitatea funcției f rezultă că putem aplica teorema valorilor intermediare. Prin urmare, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, +1]$, adică aplicația $f : \mathbf{R} \to [-1, 1]$ este surjectivă.

În general, dacă marginile m, M ale unei funcții continue $f : I \to \mathbf{R}$ pe un interval I sînt atinse, atunci $f(I) = [m, M]$; dacă nici una din marginile funcției nu este atinsă, atunci $f(I) = (m, M)$. [Aici $m = \inf_I f$ și $M = \sup_I f$, calculate în $\overline{\mathbf{R}}$]. De exemplu, pentru funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, avem $m = -\infty$, $M = \infty$, deci $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty, \infty)$ și f rezultă bijectivă.

Observații. 1) Dacă $I = [a, b]$ și f este continuă pe I, nu rezultă, în general, că m, M sînt atinse chiar în capetele intervalului I.

2) Dacă I este un interval compact și $f : I \to \mathbf{R}$ continuă, atunci intervalul $J = f(I)$ este compact, anume $J = [m, M]$. Dacă $I = (a, b)$ este un interval deschis și $f : I \to \mathbf{R}$ este continuă, nu putem afirma despre $J = f(I)$ decît că este un interval, fără a putea specifica dacă este închis, deschis, sau închis la un capăt; se poate întîmpla ca intervalul J să fie compact, sau nemărginit, cum vă puteți convinge singuri pe exemple simple.

2.3. Inversarea funcțiilor continue

Sîntem acum în măsură să ne ocupăm de problema inversării funcțiilor continue.

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție injectivă pe un interval I. Atunci, notînd $J = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$, este definită o aplicație bijectivă

$$f : I \to J \text{ (notat tot cu } f).$$

Conform corolarului precedent, dacă f este continuă, atunci J este un interval. Arătăm că *dacă o funcție $f : I \to \mathbf{R}$ este continuă și injectivă pe un interval I, atunci f este în mod necesar strict monotonă.* Într-adevăr, în caz contrar ar exista cel puțin trei puncte $x_1 < x_2 < x_3$ în I astfel încît

$f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3)$ (sau $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_2) > f(x_3)$).

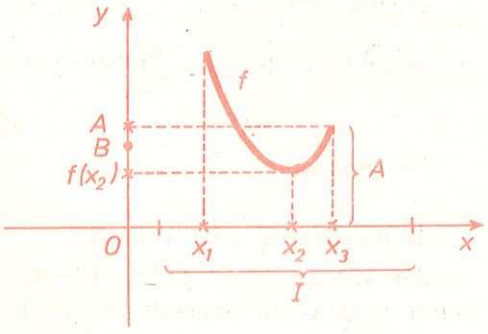


Fig. III.10

Ne situăm în primul caz, celălalt caz tratîndu-se analog (fig. III.10). Fie atunci $A = \min(f(x_1), f(x_3))$ și $B = \frac{A + f(x_2)}{2}$. Aplicînd teorema valorilor intermediare, există $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ și $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încît $f(\xi_1) = B$, $f(\xi_2) = B$. Așadar, $f(\xi_1) = f(\xi_2)$ și cum f este injectivă, rezultă $\xi_1 = \xi_2$, ceea ce este absurd.

Enunțăm și demonstrăm ultimul rezultat important al acestui capitol. În esență el arată că o funcție continuă pe un interval este inversabilă dacă și numai dacă este strict monotonă și atunci inversa ei este continuă și strict monotonă, adică inversarea funcțiilor continue se face pe intervale de strictă monotonie. Mai precis, are loc:

TEOREMA III. 7. Fie f o funcție continuă pe un interval I și $J = f(I)$. Funcția $f : I \to J$ este bijectivă dacă și numai dacă este strict monotonă și în acest caz, funcția $f^{-1} : J \to I$ este continuă și strict monotonă.

Demonstrație. Prima parte a teoremei a fost demonstrată anterior (pentru că este evident că o funcție strict monotonă pe I este injectivă). Pentru a fixa ideile, presupunem că f este strict crescătoare pe I. Atunci, rezultă că f^{-1} este strict crescătoare pe J (deoarece dacă $u_1 < u_2$ în J, $u_1 = f(x_1)$, $u_2 = f(x_2)$, avem neapărat $x_1 < x_2$, adică $f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$).

Rămîne să arătăm că f^{-1} este continuă pe intervalul J; fie $y_0 \in J$ un punct oarecare, deci $y_0 = f(x_0)$ cu $x_0 \in I$. Presupunem că y_0 nu este o extremitate a lui J (celălalt caz tratîndu-se similar).

Pentru a arăta că f^{-1} este continuă în y_0, aplicăm definiția III.1 și fie U o vecinătate oarecare a lui $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Alegem α, β astfel încît $(\alpha, \beta) \subset U$ și $\alpha < x_0 < \beta$. Cum f este strict crescătoare, avem $f(\alpha) < f(x_0) < f(\beta)$. Alegem vecinătatea $V = (f(\alpha), f(\beta))$ a punctului $f(x_0)$. Avem de arătat că pentru orice $y \in V$ rezultă $f^{-1}(y) \in U$; într-adevăr, conform teoremei III.6, pentru acest y există $x \in (\alpha, \beta)$ astfel încît $y = f(x)$. Dar atunci $x = f^{-1}(y)$ aparține intervalului (α, β), deci și lui U. Teorema este complet demonstrată.

Observație. Teorema III.7 ne asigură că funcțiile inverse ale funcțiilor uzuale sînt continue. Fie, de exemplu, $n \geqslant 1$ întreg și funcția $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$. Funcția f este evident injectivă și, conform teoremei III.6, este și surjectivă de la $[0, \infty)$ la $[0, \infty)$, fiind continuă și strict monotonă. Ea are deci o inversă, f^{-1} definită pe $[0, \infty)$ cu valori în $[0, \infty)$, care rezultă continuă conform teoremei III.7. Această inversă este funcția radical definită prin $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Analog, funcția $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ se poate inversa, iar funcția inversă, $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ rezultă continuă în virtutea teoremei III.7.

2.4. Aplicații

a) Rezolvarea unor ecuații

Am văzut că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă care ia valori de semn contrar în capetele intervalului, adică $f(a)f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție ξ pe intervalul (a, b), adică funcția are un zerou pe acest interval. Dacă, în plus, funcția f este strict crescătoare (sau strict descrescătoare) pe intervalul $[a, b]$, atunci soluția ξ este unică.

Exemple

1) Funcția $x^3 + 4x - 6 = 0$ are exact un zerou ξ situat pe intervalul $[1, 2]$. Într-adevăr, notînd $f(x) = x^3 + 4x - 6$, se obține o funcție continuă și, în plus, $f(1) = -1$, $f(2) = 10$, deci $f(1)\,f(2) < 0$ și, în plus, f este strict crescătoare pe intervalul $[1, 2]$.

2) Ecuația $2^x - 1 - \cos x = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[0, 1]$, deoarece punînd $f(x) = 2^x - 1 - \cos x$, avem $f(0) = -1$, $f(1) = 1 - \cos 1 > 0$.

b) Semnul unei funcții

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă pe un interval I și dacă f nu se anulează în nici unul dintre punctele intervalului I (adică ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții pe I), atunci *funcția f are în mod necesar un semn constant pe I.* Într-adevăr, în caz contrar ar exista puncte $x_1 < x_2$ pe I astfel încît $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ și atunci f s-ar anula într-un punct $\xi \in (x_1, x_2)$ care aparține lui I.

În general, a studia semnul unei funcții înseamnă a indica mulțimile de puncte în care funcția este pozitivă sau negativă. Vom da o regulă practică importantă în stabilirea semnului unor funcții elementare. Să presupunem

că toate zerourile reale ale unei funcții continue $f : I \to \mathbf{R}$ sînt $a_1 < a_2 < \ldots$ $\ldots < a_p < \ldots$ (ele pot fi în număr infinit). Atunci pe fiecare din intervalele (a_1, a_2), (a_2, a_3), ..., (a_{p-1}, a_p) etc. funcția are semn constant și, ca atare, este suficient ca în fiecare din aceste intervale să alegem cîte un singur punct și să determinăm semnul lui f acolo.

Exemple

1) Stabilim semnul funcției $f(x) = x^3 - x$ pe $\mathbf{R}$. Zerourile lui f sînt $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, 0)$, $I_3 = (0, 1)$, $I_4 = (1, \infty)$ funcția f are semn constant. Alegem $\xi_1 = -2 \in I_1$, și calculăm $f(\xi_1) = -6$; apoi luăm $\xi_2 = -\frac{1}{2} \in I_2$, $f(\xi_2) = \frac{3}{8}$; $\xi_3 = \frac{1}{2} \in I_3$, $f(\xi_3) = -\frac{3}{8}$; $\xi_4 = 3 \in I_4$, $f(\xi_4) = 24$. Așadar, funcția f este negativă pe I_1 și I_3 și pozitivă pe I_2 și I_4.

2) Rezolvăm inecuația $(x^2 - 2x - 3) \cdot \lg x < 0$. Așadar, $I = (0, \infty)$ și zerourile funcției $f(x) = (x^2 - 2x - 3) \cdot \lg x$ pe I sînt $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Funcția f are semn constant pe intervalele $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = (1, 3)$, $I_3 = (3, \infty)$. Luînd $\xi_1 = \frac{1}{10} \in I_1$, $\xi_2 = 2 \in I_2$, $\xi_3 = 10 \in I_3$, avem $f(\xi_1) = \left(\frac{1}{100} - \frac{2}{10} - 3\right) \cdot \lg \frac{1}{10} = \frac{319}{100} > 0$, $f(\xi_2) < 0$, $f(\xi_3) > 0$. Ca atare, funcția f este negativă pe I_2 și răspunsul cerut este $x \in (1, 3)$.

EXERCIȚII (capitolul III, § 2)

1. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - x$ este mărginită pe orice interval $[1, a]$, $a > 1$, dar nu și pe intervalul $[1, \infty)$.

2. Să se arate că funcția $f : (1, 2) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$ este mărginită pe intervalul deschis $(1, 2)$, dar nu își atinge marginile.

3. Să se arate că dacă $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, atunci f este mărginită.

4. Să se arate că funcțiile σ și sgn au proprietatea lui Darboux pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, nu și pe intervale de forma $[-a, a]$, $a > 0$.

5. Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{x}$ are proprietatea că $f(-1) = -2$ și $f(1) = 2$, deci ia valorile -2 și 2, totuși ea nu ia valoarea zero. Se contrazice astfel teorema III.7?

6. Să se arate că pentru orice funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continuă și mărginită există $\xi \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(\xi) = \xi$.

7. Să se arate că funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare se anulează cel puțin o dată pe mulțimile indicate:

a) $f(x) = -x^3 + 6x + 20$ pe $\mathbf{R}$;

b) $f(x) = x^4 + 3x + 1$ pe $[-1, 0]$;

c) $f(x) = ax^{2n+1} + bx + c$ pe $\mathbf{R}$ (a, b, c fiind constante reale și $n \in \mathbf{N}$);

d) $f(x) = (x - 2) \sin \pi x$ pe $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

8. Să se rezolve inecuațiile:

a) $(x^2 - 4)\lg x > 0$; b) $(x^2 + 4x - 5)(2^x - 4) < 0$; c) $x \sin x > 0$.

9. Să se determine $a > 0$ minim, astfel încît funcția $f : [a, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ să fie injectivă. Să se studieze apoi continuitatea aplicației inverse $f^{-1} : J \to I$, unde $I = [a, \infty)$, $J = f(I)$.

10. Fie $f:[0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încît să existe și să fie finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Să se arate că f este mărginită.

11. Să se arate că $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$ are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă $a \in [-1, +1]$.

12. Fie $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ x^3, & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$. Să se arate că $f([0, 1])$ este un interval, dar că f nu are proprietatea lui Darboux.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL III

1. *Să se arate că o funcție $f:(a, b) \to \mathbb{R}$ este continuă dacă și numai dacă $\forall\, x \in (a, b)$, avem* $\lim\limits_{h\to 0} [f(x + h) - f(x)] = 0$.

Soluție. Aceasta este numai o reformulare a definiției. Pentru orice $x_0 \in (a, b)$, condiția de continuitate este $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ și, notînd $x - x_0 = h$, $\lim\limits_{h\to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$.

Folosind variațiile (sau „creșterile", cum se mai numesc) $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, condiția de continuitate a lui f în punctul x_0 revine la faptul că $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0$.

2. *Să se studieze continuitatea în punctul $x = 1$ pentru fiecare din funcțiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ următoare:*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x - 1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$;

c) $f(t) = \dfrac{\sqrt[3]{t - 1} - 2t}{t}$ pentru $t \neq 0$; $f(0) = 1$;

d) $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 1 - \dfrac{1}{10^5} < t < 1 + \dfrac{1}{10^5} \\ 3, & \text{în rest} \end{cases}$.

Soluție: a) Avem $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} x^2 = 1$; $f(1 + 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} (2x - 1) = 1$ și $f(1) = 1^2 = 1$, deci $f(1 - 0) = f(1 + 0) = f(1)$ și, ca atare, f este continuă.

b) $f(1 - 0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$, $f(1 + 0) = \infty$, $f(1) = 1$. Funcția f este discontinuă în punctul $x = 1$.

c) Funcția f este definită și continuă în $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) Funcția f este continuă în punctul $x = 1$ deoarece restricția ei la vecinătatea $\left(1 - \dfrac{1}{10^5}, 1 + \dfrac{1}{10^5}\right)$ a punctului $x = 1$ este constantă, deci continuă.

3. *Să se arate că dacă $f, g : E \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue într-un punct $x_0 \in E$ și dacă $f(x_0) < g(x_0)$, atunci există $\delta > 0$ astfel încît $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap E$.*

Soluție. Notăm $h = g - f$, deci h este continuă în x_0 și $h(x_0) > 0$. Atunci h rămîne strict pozitivă pe o vecinătate a lui x_0, adică există $\delta > 0$ astfel încît $h(x) > 0$, $\forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap E$.

4. *Fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ două funcții continue astfel încît $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{Q}$. Să se arate că $f = g$. Rămîne concluzia adevărată dacă $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{Z}$?*

Soluție. Fie $a \in \mathbf{R}$ arbitrar fixat. Alegem un șir de numere raționale $x_n \to a$. Deoarece f, g sînt continue în a, avem $f(x_n) \to f(a)$, $g(x_n) \to g(a)$, și cum $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall\, n \geqslant 0$, rezultă $f(a) = g(a)$. Răspunsul la ultima întrebare este negativ, așa cum arată funcțiile $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = 0$.

5. *Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ este bine definit numărul $\varphi(x) = \min\limits_{k \in \mathbf{Z}} |\, x - k\,|$ și că funcția $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este continuă pe $\mathbf{R}$.*

Soluție. Fixînd $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x)$ este cea mai mică distanță posibilă de la x la un număr întreg. Dacă $x \in [0, 1]$ se observă că

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1 - x, & \text{dacă } \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{Apoi } \varphi(x+1) = \varphi(x),\ \forall\, x \in \mathbf{R},$$

deci φ este periodică de perioadă 1. Se verifică direct continuitatea lui φ în puncte din $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, iar în oriice punct întreg k, $\varphi(k - 0) = \varphi(k + 0) = 0$. Graficul lui φ este schițat în figura III.11.

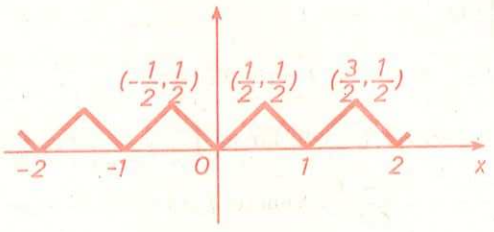


Fig. III.11

6. *Se consideră treapta unitate $\sigma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Să se arate că σ este discontinuă în $x = 0$ și că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o funcție continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, astfel încît $f(x) = \sigma(x)$ pentru orice $x \in (-\infty, 0) \cup [\varepsilon, \infty)$.

Soluție. Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \sigma(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sigma(x) = 1$, deci σ este discontinuă în $x = 0$. Considerăm apoi funcția $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geqslant \varepsilon \\ \dfrac{1}{\varepsilon} x, & \text{dacă } 0 \leqslant x < \varepsilon \end{cases}$

Este evident că f este continuă pe $\mathbf{R}$ și $f(x) = \sigma(x)$, dacă $x < 0$ și dacă $x \geqslant \varepsilon$.

7. a) *Fie $a < b$. Să se arate că ecuația $(x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b).*

b) *Fie $a < b < c$ fixate. Să se arate că ecuația $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{2}{x - b} + \dfrac{3}{x - c} = 0$ are o soluție cuprinsă în (a, b) și o a doua în (b, c).*

Soluție. a) Notăm $f(x) = (x^2 + 1)(x - b) + (x^4 + 1)(x - a)$. Deoarece $f(a) = (a^2 + 1)(a - b) < 0$, $f(b) = (b^4 + 1)(b - a) > 0$, atunci funcția continuă f se anulează cel puțin o dată pe intervalul (a, b).

b) Ecuația este echivalentă în $\mathbf{R} \setminus \{a, b, c\}$ cu $g(x) = (x - b)(x - c) + 2(x - c)(x - a) + 3(x - a)(x - b) = 0$. Avem $g(a) = (a - b)(a - c) > 0$, $g(b) < 0$, $g(c) > 0$ etc.

8. *Să se arate că orice funcție polinomială de grad impar are cel puțin un zero real.*

Soluție. Fie $f(x) = a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \ldots + a_{2n+1}$; pentru a fixa ideile, presupunem $a_0 > 0$. Deoarece $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, există α astfel încît $f(\alpha) < 0$. Apoi $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, deci există $\beta > \alpha$ astfel încît $f(\beta) > 0$. Așadar, f se anulează între α și β, conf. lemei de la pag. 111.

9. *Să se studieze semnul următoarelor funcții:*

a) $f(x) = x(x - a)(x - b)$, *unde* $0 < a < b$ *sînt constante;*

b) $f(x) = (x + 1) \ln(-x)$, $x < 0$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$;

d) $(x) = \operatorname{sh} x$.

Soluție. a) Zerourile funcției f sînt 0, a, b. Pe intervalele $(-\infty, 0)$, (a, b) funcția este negativă, iar pe intervalele $(0, a)$, (b, ∞) funcția este pozitivă.

b) Funcția este definită pe intervalul $I = (-\infty, 0)$. Ea are un singur punct unde se anulează, $x = -1$. Pe ambele intervale $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ funcția f este negativă (are semn constant pe fiecare interval și, de exemplu, $f(-e) = (-e + 1) \cdot \ln e = 1 - e < 0$, $f\left(-\frac{1}{e}\right) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \cdot \ln \frac{1}{e} = \frac{1}{e} - 1 < 0$.

c) Zerourile lui f pe intervalul $I = [0, 2\pi]$ sînt $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Pe intervalele $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ funcția este pozitivă ($f \geqslant 0$), iar pe $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$ funcția este negativă ($f < 0$).

d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$. Funcția f este negativă pe $(-\infty, 0)$ și pozitivă pe $(0, \infty)$.

10. *Fie I un interval și $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție avînd proprietatea lui Darboux. Să se arate că:*

a) *dacă f nu se anulează pe I, atunci f are semn constant pe I;*

b) *dacă f are limite laterale în orice punct din I, atunci f este continuă pe I.*

Soluție. a) Dacă, prin absurd, f nu ar avea semn constant pe I, atunci ar exista $a, b \in I$ astfel încît $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Atunci f ar lua, o dată cu valorile $f(a)$, $f(b)$, și valoarea intermediară zero, adică ar exista c cuprins între a, b (deci $c \in I$), astfel încît $f(c) = 0$, ceea ce contravine ipotezei că f nu se anulează pe I.

b) Admitem, prin absurd, că f nu ar fi continuă într-un punct $x_0 \in I$; conform ipotezei, două din numerele $l_s = f(x_0 - 0)$, $l_d = f(x_0 + 0)$, $f(x_0)$ sînt distincte. Să presupunem, de exemplu, că $f(x_0) < l_s$ și fie $\varepsilon = l_s - f(x_0)$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încît dacă $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, atunci $l_s - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < l_s + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{3\varepsilon}{2}$.

Fixăm $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, deci $f(x_1) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece f are proprietatea lui Darboux pe I, o dată cu valorile $f(x_0)$, $f(x_1)$, funcția f ia valoarea intermediară $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$, adică există $c \in (x_1, x_0)$ astfel încît $f(c) = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$. Dar $f(c) > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, adică $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} > f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$, ceea ce este absurd.

11. *Fie* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcție astfel încît* $|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x - y|}$ *pentru orice* $x, y \in \mathbf{R}$. *Să se arate că există* $a > 0$ *astfel încît* $|x| \leqslant a$ *să implice* $|f(x)| < a$. *Deduceți că există un punct* $u \in \mathbf{R}$ astfel încît $f(u) = u$.

Soluție. Evident, f este continuă pe $\mathbf{R}$. Partea secundă rezultă astfel: se consideră funcția continuă $g : [-a, a] \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$ și rezultă $g(-a) \cdot g(a) = (f(-a) + a) \cdot (f(a) - a) < 0$ pentru orice $x \in [-a, a]$, deci există $u \in [-a, a]$ astfel încît $g(u) = 0$, adică $f(u) = u$. Rămîne de demonstrat prima parte a enunțului. Pentru $y = 0$ se obține $|f(x) - f(0)| \leqslant \sqrt{|x|}$, deci $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \sqrt{|x|}$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă nu ar exista a ca în enunț, atunci pentru orice $a > 0$, ar exista x, $|x| \leqslant a$ și $|f(x)| \geqslant a$; luînd $a = n$, $n \geqslant 1$ întreg, există x_n, $|x_n| \leqslant n$ astfel încît $|f(x_n)| \geqslant n$, deci $n \leqslant |f(0)| + \sqrt{|x_n|} \leqslant |f(0)| + \sqrt{n}$ pentru orice n. Împărțind cu $\sqrt{n}$ și făcînd $n \to \infty$, se ajunge la o absurditate.

12. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă (pe un interval compact). Să se arate că $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ astfel încît $\forall\, x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ să avem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soluție. Dacă nu ar fi îndeplinită condiția din enunț, ar exista $\varepsilon > 0$ astfel încît $\forall \delta > 0$ și, în particular, pentru $\delta = \frac{1}{n}$ ($n \geqslant 1$ întreg) să existe $x_n, y_n \in [a, b]$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ și $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Conform lemei lui Cesaró, șirurile $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $(y_n)_{n \geqslant 1}$, fiind mărginite, au subșiruri convergente $x_{k_n} \to \xi$, $y_{k_n} \to \eta$. Deoarece $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{n}$, rezultă $\xi = \eta$. Deoarece f este continuă, rezultă $f(x_{k_n}) \to f(\xi)$, $f(y_{k_n}) \to f(\xi)$, deci $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to 0$ pentru $n \to \infty$ și rezultă $0 \geqslant \varepsilon$, ceea ce este absurd.

(Condiția $\varepsilon - \delta$ din enunț se mai numește condiția de continuitate uniformă a lui f pe intervalul $[a, b]$. Atunci enunțul se poate formula astfel: *orice funcție continuă pe un interval compact este uniform continuă.*)

Capitolul IV
FUNCȚII DERIVABILE

Una din noțiunile fundamentale ale analizei matematice, și în fond ale întregii științe, este cea de derivată, atribuită deopotrivă lui G. Leibniz (1646—1716) și lui I. Newton (1642—1727). Această noțiune modelează ceea ce s-ar putea numi „viteza de variație a unei funcții", permite adîncirea studiului local și global al funcțiilor și, în același timp, stă la baza formulării matematice a numeroase legi ale fizicii. De altfel, I. Newton a introdus și a utilizat în mod sistematic conceptul de derivată tocmai în legătură cu studiul legilor mecanicii. Se întîlnesc derivate în studiul vitezei de deplasare a unui mobil, vitezei de variație a temperaturii unui corp sau a intensității curentului electric, în definiția densității liniare a unei bare și oriunde interesează rata vreunei schimbări.

§ 1. Derivata unei funcții într-un punct

1.1. Originea noțiunii de derivată

Au existat două probleme, una fizică — modelarea matematică a noțiunii intuitive de viteză a unui mobil — și alta geometrică — tangenta la o curbă plană —, care au condus la descoperirea noțiunii de derivată. Am folosit de mai multe ori referiri la viteza unui mobil, dar abia acum vom putea da definiția matematică a acestui concept.

a) *Viteza instantanee a unui mobil.* Presupunem că pe o axă Δ se mișcă un mobil în sensul pozitiv al axei și că la momentul t mobilul se află în punctul de abscisă $s(t)$. Dacă mișcarea este uniformă, atunci pentru orice două momente t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2)$ raportul $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ este constant, egal cu viteza v a mobilului; în acest caz, se știe că $s(t) = v \cdot t$. Ce se întîmplă însă dacă mobilul nu mai are o mișcare uniformă, deși se mișcă pe aceeași axă Δ? Raportul anterior nu va mai fi constant și pentru orice momente t_1, $t_2 (t_1 \neq t_2)$ raportul $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ dintre distanța parcursă și timpul scurs se numește *viteza medie* a mobilului între momentele respective (de remarcat că nu am fixat o ordonare a momentelor t_1, t_2). Să considerăm acum un moment t_0 de referință. Practic nu există mișcări uniforme, dar pe intervale din ce în ce mai mici mișcarea tinde să devină uniformă. Pentru $t \to t_0$, $t \neq t_0$ se poate considera că mișcarea mobilului pe intervalul de timp dintre t_0 și t tinde să

devină uniformă, iar viteza medie respectivă tinde către o caracteristică a mișcării exact la momentul t_0. Aceasta sugerează definiția *vitezei instantanee a mobilului la momentul* t_0 ca fiind limita

$$(1)\quad v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

în ipoteza că această limită există. Așadar, $v(t_0)$ este limita pentru $t \to t_0$ a vitezei medii a mobilului între momentul t_0 și momentul $t \neq t_0$.

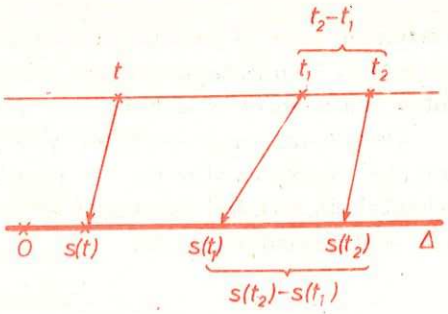


Fig. IV.1

De exemplu, în studiul căderii corpurilor în vid s-a dovedit că spațiul parcurs în metri după t secunde este $s(t) = \frac{1}{2} gt^2$. Fixînd un moment oarecare t_0, viteza la momentul t_0 este

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\frac{1}{2} gt^2 - \frac{1}{2} gt_0^2}{t - t_0} = \frac{1}{2} \lim_{t \to t_0} g(t + t_0) = \frac{1}{2} g \cdot 2t_0 = g \cdot t_0$$

și viteza la orice moment t va fi $v(t) = g \cdot t$ (g este accelerația gravitațională $g \simeq 9{,}81$ m/s^2).

În mod asemănător, dacă $v(t)$ este viteza mobilului la orice moment t, atunci se definește *accelerația mobilului la momentul* t_0 ca fiind

$$a(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

în ipoteza că această limită există. Legea fundamentală a mecanicii lui Newton arată că la fiecare moment t forța $F(t)$ care acționează asupra mobilului, masa m a mobilului și accelerația $a(t)$ sînt legate prin relația $F(t) = m \cdot a(t)$.

b) O limită de tipul (1) apare și într-o problemă pur geometrică. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție continuă în punctul $x_0 \in (a, b)$ și (C) graficul lui f; așadar, punctul M_0 de coordonate $(x_0, f(x_0))$ aparține lui (C). Pentru grafice speciale (de exemplu pentru un semicerc $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x_0 \in (-R, R)$) există o noțiune elementară de tangentă și este interesant și important să

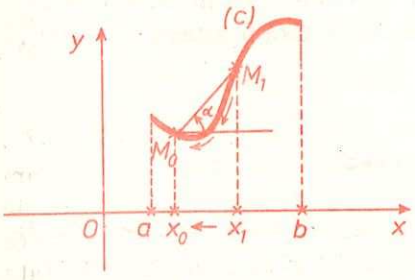


Fig. IV.2

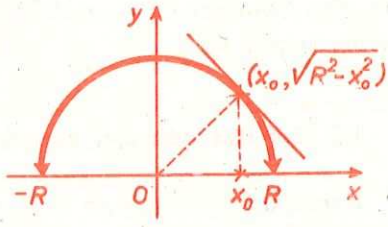


Fig. IV.3

extindem această noțiune. Corespunzător intuiției, tangenta în M_0 la (C) trebuie să fie o dreaptă trecînd prin M_0 și rămîne să vedem ce legătură există între coeficientul ei unghiular și ecuația $y = f(x)$ a lui (C).

Alegînd un punct oarecare $x_1 \neq x_0$ din (a, b) și notînd cu $M_1(x_1, f(x_1))$ punctul corespunzător pe (C), intuitiv tangenta în M_0 trebuie să fie limita secantei M_0M_1 cînd M_1 tinde către M_0. În termeni precișI, secanta M_0M_1 are coeficientul unghiular

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \text{(fig. IV.2)}$$

(α fiind măsura — depinzînd de x_1 — a unghiului făcut de semidreapta M_0M_1 cu semidreapta de capăt M_0 paralelă cu Ox). Presupunînd că există limita

$$(2) \qquad m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

aceasta este, prin definiție, coeficientul unghiular al tangentei în M_0 la (C). (Dacă această limită este $+\infty$ sau $-\infty$, tangenta în M_0 la (C) este verticală.) Dreapta trecînd prin M_0 avînd coeficientul unghiular m este, prin definiție, *tangenta în* M_0 *la* (C) și are ecuația

$$(3) \qquad y - f(x_0) = m(x - x_0).$$

În cazul semicercului (fig. IV.3) avem $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ și în punctul $M_0(x_0, \sqrt{R^2 - x_0^2})$ coeficientul unghiular al tangentei este

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_0^2 - x_1^2}{(x_1 - x_0)\left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - x_0^2}\right)} =$$

$$= -\lim_{x_1 \to x_0} \frac{(x_0 + x_1)}{\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - x_0^2}} = -\frac{x_0}{\sqrt{R^2 - x_0^2}}.$$

Se observă că tangenta în M_0 la semicerc este perpendiculară pe raza OM_0 care are coeficientul unghiular $\dfrac{f(x_0) - 0}{x_0 - 0} = \dfrac{\sqrt{R^2 - x_0^2}}{x_0} = -\dfrac{1}{m}$. Aceasta arată că în cazul semicercului cele două definiții ale tangentei într-un punct coincid.

Se pot da numeroase alte exemple în care apare în mod firesc limita unui raport între „creșterea funcției" și „creșterea variabilei", ca în cazul limitelor (1), (2). Vom reveni la astfel de exemple după ce fixăm cîteva definiții și prime rezultate.

1.2. Definiția derivatei unei funcții într-un punct

Exemplele considerate mai sus sugerează introducerea următoarei definiții fundamentale. Fie o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ ($E \subset \mathbf{R}$) și $x_0 \in E$, x_0 fiind totodată și punct de acumulare al mulțimii E. Reținem că f este definită în x_0.

DEFINIȚIA IV. 1. 1) Se spune că funcția f are derivată în punctul x_0, dacă există limita (în $\bar{\mathbf{R}}$)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ notată cu } f'(x_0); \tag{4}$$

2) Dacă derivata $f'(x_0)$ există și este finită se spune că funcția f este derivabilă în punctul x_0.

Observații. 1. Se poate întîmpla ca $f'(x_0)$ să existe și să fie $+\infty$ sau $-\infty$.

2. Trebuie remarcat că problema existenței derivatei sau a derivabilității nu se pune în punctele izolate ale mulțimii E (dacă E are astfel de puncte!).

Mai tîrziu vom introduce și alte notații ale derivatei. Trebuie remarcat că în studiul derivabilității unei funcții într-un punct intervin doar valorile acelei funcții într-o vecinătate a punctului; se mai spune că derivabilitatea este o proprietate *locală* (ca și existența limitelor de funcții sau continuitatea).

Presupunem că $f'(x_0)$ există; făcînd translația $x - x_0 = h$, atunci din (4) rezultă că

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_0 + h \in E}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5}$$

Uneori se utilizează notațiile $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x) - f(x_0)$, deci $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, adică derivata lui f într-un punct x_0 este limita dintre „creșterea funcției f" și „creșterea argumentului în punctul x_0" cînd aceasta din urmă tinde către zero. Nu vom folosi însă aceste notații.

DEFINIȚIA IV. 2. Dacă o funcție $f : E \to \mathbf{R}$ ($E \subset \mathbf{R}$) este derivabilă în orice punct al unei submulțimi $F \subset E$, atunci se spune că f este derivabilă pe mulțimea F. În acest caz, funcția

$$F \to \mathbf{R},\ x \mapsto f'(x)$$

se numește derivata lui f pe mulțimea F și se notează cu f'. Operația prin care f' se obține din f se numește derivarea lui f.

Dacă $y = f(x)$, f derivabilă, se mai scrie, prin abuz, $y' = f'(x)$; uneori se folosesc notațiile echivalente $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f)$, indicîndu-se în raport cu ce argument se face derivarea și reamintind că derivata într-un punct este limita raportului a două creșteri — a funcției și a argumentului.

Dacă f este derivabilă pe E, atunci conform relației (5) avem

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \text{ pentru orice } x \in E. \tag{6}$$

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x$. În acest caz, f este derivabilă în orice punct din $\mathbf{R}$ deoarece limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1$$

există pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În plus, $f'(x) = 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

2) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - x$, și pentru orice $x \in \mathbf{R}$, există

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) - (x^3 - x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1,$$

deci f este derivabilă pe $\mathbf{R}$.

3) Reluînd studiul mișcării pe o axă a unui mobil, relația (1) se scrie $v(t_0) = s'(t_0)$, adică viteza instantanee la momentul t_0 este derivata spațiului în acel moment (în ipoteza că funcția $t \mapsto s(t)$ este derivabilă în t_0).

4) Studiem, aplicînd definiția IV.1, derivabilitatea funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ în punctul $x = 0$. Aceasta depinde de existența limitei raportului $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$ în punctul $x = 0$.

Avem $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{-x}{x} = -1$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1$, deci limita raportului $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nu există în punctul $x = 0$ și, ca atare, funcția-modul nu este derivabilă în origine (deși este continuă în origine).

Înainte de a da și alte exemple, stabilim două rezultate teoretice importante.

TEOREMA IV. 1. Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Demonstrația este imediată: Presupunem că $f : E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, deci limita (4) există și este finită. Din relația $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$; $x \neq x_0$ rezultă $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) =$ $= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, deci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, adică f este continuă în x_0.

Reciproca teoremei IV.1 este în general falsă, așa cum o dovedește exemplul funcției-modul în origine.

În studiul existenței limitei unei funcții într-un punct un criteriu util l-a constituit egalitatea limitelor laterale. Adaptăm acest criteriu la studiul derivabilității unei funcții într-un punct, ținînd cont că existența derivatei înseamnă în fond existența unei anumite limite.

DEFINIȚIA IV. 3. *Fie $E \subset \mathbf{R}$ și $x_0 \in E$ un punct de acumulare pentru $E \cap (-\infty, x_0)$. Dacă limita*

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

există (în $\overline{\mathbf{R}}$), atunci această limită se numește **derivata la stînga** *a funcției f în punctul x_0. Dacă, în plus, această limită există și este finită, atunci se spune că f este* **derivabilă la stînga** *în punctul x_0.*

În mod similar se definesc **derivata $f'_d(x_0)$ la dreapta** și noțiunea de **funcție derivabilă la dreapta în x_0.**

Direct din teorema II.7, rezultă

TEOREMA IV. 2. Dacă $f : E \to \mathbf{R}$ este derivabilă în punctul $x_0 \in E$, atunci f este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$. Reciproc, dacă f este derivabilă la stînga și la dreapta în x_0 și dacă $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$, atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = f'_s(x_0)$.

Dacă $E = [a, b]$, faptul că f este derivabilă în a (respectiv b) revine la aceea că f este derivabilă la dreapta în punctul a (respectiv la stînga în b).

Exemple

1) Pentru funcția-modul $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, avem $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{|x|}{x} = -1$ și similar, $f'_d(0) = 1$, regăsim faptul că f nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

2) Se poate întîmpla ca $f'_d(x_0)$, $f'_s(x_0)$ să fie egale fără ca funcția f să fie derivabilă în x_0. Considerăm exemplul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ dacă } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \text{ dacă } x = 0 \\ x + 1 & , \text{ dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{(fig. IV.4).}$$

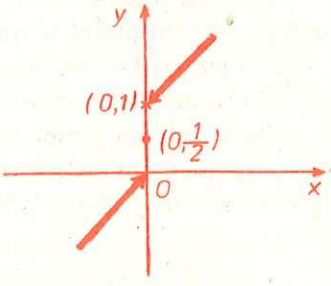


Fig. IV.4

Aici $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{x - \frac{1}{2}}{x} = \infty$, $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{x + 1 - \frac{1}{2}}{x} = \infty$,

dar funcția nu este derivabilă în $x = 0$ (nefiind nici măcar continuă în $x = 0$).

Raționînd ca în teorema IV.1, rezultă că dacă f este derivabilă la dreapta (respectiv la stînga) într-un punct x_0, atunci f este continuă la dreapta (respectiv la stînga) în acel punct.

3) Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ deoarece derivatele laterale, deși există, nu sînt finite; anume,

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \infty \text{ și } f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{-x}}{x} = -\infty.$$

În exemplele 1, 3 am întîlnit funcţii continue care sînt nederivabile într-un punct (vom vedea că în celelalte puncte acestea sînt derivabile). Exemplul care urmează arată că există funcţii care sînt derivabile într-un singur punct.

4) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Se observă uşor că această funcţie este continuă în punctul $x = 0$ şi discontinuă în orice punct $x \neq 0$. Să examinăm derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$ şi, pentru aceasta, să considerăm raportul

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = x, & \text{dacă } x \in \mathbb{Q},\ x \neq 0 \\ \dfrac{0 - 0}{x} = 0, & \text{dacă } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

şi este clar că acesta are limita 0 cînd x tinde către 0, adică f este derivabilă şi $f'(0) = 0$. În punctele $x \neq 0$, f nu este derivabilă (deoarece f nu este continuă în acele puncte).

5) Se poate acum explica ce se înţelege prin mişcare rectilinie, *cu viteza funcţie continuă*, a unui mobil, anume: spaţiul este funcţie de timp derivabilă şi cu derivata continuă.

1.3. Interpretarea geometrică a derivatei

Dacă $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$, atunci conform formulelor (2), (3), (4) graficul lui f are tangentă în x_0 (sau mai corect în punctul $(x_0, f(x_0))$, anume dreapta de ecuaţie

$$y - f(x_0) = m(x - x_0), \text{ unde } m = f'(x_0).$$

Aşadar $f'(x_0)$ este coeficientul unghiular al tangentei la graficul lui f, în punctul $(x_0, f(x_0))$. Dacă $f'(x_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (în sensul că limita (4) este egală cu $+\infty$ sau $-\infty$), atunci tangenta în $(x_0, f(x_0))$ este paralelă cu axa Oy.

Fără nici o dificultate, se poate vorbi de semitangentă la dreapta sau la stînga într-un punct la un grafic, în legătură cu derivatele laterale respective în acel punct. Geometric, pentru o funcţie derivabilă într-un punct, direcţiile semitangentelor la dreapta şi stînga la grafic în acel punct coincid.

Dacă într-un punct x_0, f este continuă şi avem $f'_d(x_0) = +\infty$ şi $f'_s(x_0) = -\infty$ (sau invers), atunci punctul x_0 se numeşte *punct de întoarcere* al graficului lui f (fig. IV.5).

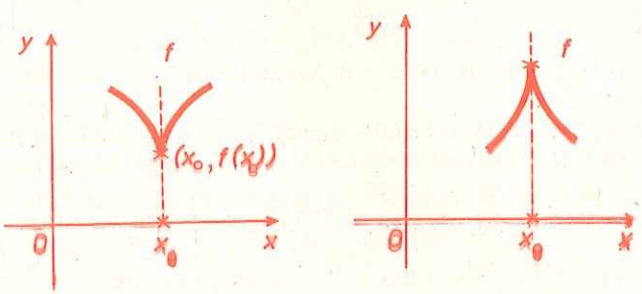


Fig. IV.5

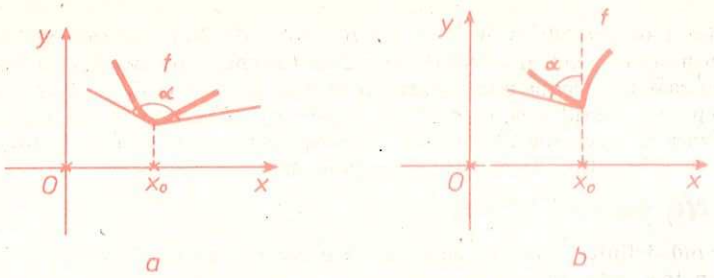


Fig. IV.6

Dacă o funcție $f: E \to \mathbb{R}$ $(E \subset \mathbb{R})$ este continuă într-un punct $x_0 \in E$, dacă există ambele derivate laterale, cel puțin una dintre ele fiind finită, dar funcția nu este derivabilă în x_0, atunci se spune că x_0 este *punct unghiular* al graficului lui f (fig. IV.6). Într-un punct unghiular cele două semitangente, la stînga și la dreapta, formează un unghi $\alpha \in (0, \pi)$.

Exemple

1) Scriem ecuația tangentei la graficul (C) al funcției $f(x) = \sqrt{x}$ în punctul $x_0 = 1$. Avem $f(1) = \sqrt{1} = 1$ și $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$ și ecuația cerută este $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$, adică $y = \dfrac{1}{2}(x + 1)$ (fig. IV.7).

În punctul $x = 0$ graficul (C) are pe Oy ca semitangentă, deoarece $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \infty$.

2) Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \sin x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$, avem

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^2}{x} = 0 \text{ și}$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Atunci $y = 0$ este semitangentă la stînga în origine și $y = x$ este semitangenta la dreapta în origine la graficul lui f. Originea este punct unghiular (fig. IV.8).

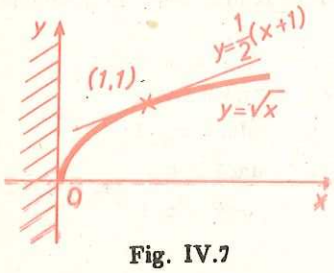


Fig. IV.7

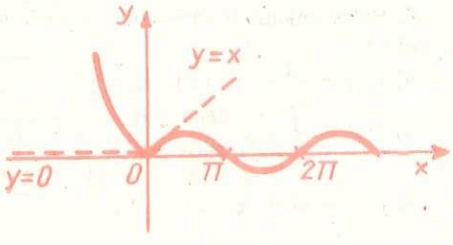


Fig. IV.8

Observație. Este bine de știut că există funcții continue pe un interval care nu sînt derivabile în nici un punct al intervalului. Primul exemplu de acest fel a fost construit de K. Weierstrass și a produs un șoc extraordinar. Ulterior s-au dat exemple mai simple, dar toate depășesc cadrul acestui manual. Existența, așadar, a unei funcții cu graficul neîntrerupt care nu are tangentă în nici ùn punct contravine aparent intuiției noastre, dar dovedește că intuiția necenzurată de raționament poate conduce la erori.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 1)

1. Folosind definiția IV.1, să se studieze derivabilitatea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în punctele indicate:

a) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$, $x_0 = -1$;

c) $f(x) = \sin 5x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

d) $f(x) = x^3 + x^2$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 8}$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;

g) $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$;

h) $f(x) = x \cdot \sigma(x)$, $x_0 = 0$.

2. Să se studieze continuitatea și derivabilitatea următoarelor funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ în punctul $x = 0$;

a) $f(x) = x^2 + x$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 2x^2 + x, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = |\sin x|$;

d) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ -x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

3. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbf{R}$ și nu este derivabilă în origine.

4. Să se arate că dacă $\alpha > 1$ este întreg constant, atunci funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă în origine.

5. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ -\sqrt{-x}, & \text{dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$. Să se arate că f este discontinuă în origine și că $f'_d(0) = f'_s(0) = \infty$. Se contravine teoremei IV.1?

6. Folosind formula (6), să se calculeze derivata f' pentru următoarele funcții $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 3x$; b) $f(x) = x^2 - 7x + 2$; c) $f(x) = x^3 + 4x$; d) $f(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + \dfrac{1}{3} x^3$.

7. Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f(x) = x^2 + x \cdot |x|$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 2x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \sigma(x)$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = x + |x - 2|$, $x_0 = 2$;

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ x^2, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ 2x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Să se traseze graficele acestor funcții.

8. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel ca funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & , \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ a \sin x + b \cos x, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$ să fie derivabilă.

9. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$. Să se calculeze derivatele laterale ale lui f în punctele 0, 1, -1.

10. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$ și $x_0 = 1$. Să se calculeze coeficienții unghiulari ai secantelor definite de punctele $(x_0, f(x_0))$ și $(\alpha, f(\alpha))$ pentru $\alpha = 1{,}5$; $\alpha = 1{,}1$; $\alpha = 1{,}05$. Ce se întîmplă cu acești coeficienți dacă $\alpha \to 1$?

11. Să se scrie ecuația tangentei la graficele funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indicate în punctele x_0 respective:

a) $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = (2x + 1)^2$, $x_0 = 4$;
d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $x_0 = 2$;
e) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
f) $f(x) = x + \sin x$, $x_0 = \pi$.

12. Să se determine punctele unghiulare sau punctele de întoarcere pentru funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x\sqrt{|x - 2|}$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

c) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x < 1 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2}, & \text{dacă } x \geqslant 1 \end{cases}$;

d) $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{|x| + 1}$.

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & , \text{ dacă } x \leqslant 0 \end{cases}$. Să se studieze derivabilitatea lui f și să se determine punctele unde tangenta la grafic trece prin origine.

14. Să se determine tangentele la graficul de ecuație $y = (x + 1)^2$ care trec prin origine. Idem, pentru $y = x^3 + 1$.

§ 2. Operații cu funcții derivabile. Derivatele unor funcții uzuale

Am întîlnit deja exemple de funcții derivabile. Este utilă o sinteză a derivatelor funcțiilor uzuale și se impune stabilirea unor reguli generale de derivare a sumelor, produselor, compunerilor etc. de funcții derivabile.

2.1. Derivatele cîtorva funcții uzuale

a) *Orice funcție constantă* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = c$ *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$, *cu derivata nulă* ($f'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$).

Se mai scrie

(7) $$\boxed{c' = 0}.$$

Demonstrația este imediată: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0.$

Vom vedea mai tîrziu că și reciproc, dacă o funcție are derivata nulă pe un interval, atunci ea este constantă pe acel interval.

b) *Funcția-putere* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n (n \geqslant 1$ întreg) *este derivabilă pe* $\mathbf{R}$ *și* $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Se mai scrie

$$(8) \qquad \boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ \forall\, x \in \mathbf{R}}.$$

Într-adevăr, $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{C_n^1 x^{n-1}h + C_n^2 x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h} = \lim_{h\to 0} (C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) =$$

$$= C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1},\ \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

În particular, $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^{10})' = 10x^9$.

c) Formula (8) poate fi generalizată. Anume, pentru orice constantă reală r, funcția putere $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^r$, este derivabilă și, în plus,

$$(9) \qquad \boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ \forall\, x > 0}.$$

Într-adevăr, $(x^r)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^r - x^r}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^r\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^r - 1\right]}{h} =$

$= x^r \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^r - 1}{h}$ și, făcînd $h = xy$, $(x^r)' = x^r \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^r - 1}{xy} =$

$= x^{r-1} \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{(1+y)^r - 1}{y} = rx^{r-1}$, ultima relație decurgînd din relația (45) din capitolul II, p. 89.

Aplicînd formula (9) rezultă

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall\, x > 0;$$

$$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\, x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ \forall\, x > 0.$$

Această ultimă relație are loc și pentru $x < 0$. În punctul $x = 0$ funcțiile $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ și $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ nu sînt derivabile (deoarece $f'_d(0) = \infty$; $g'_s(0) = g'_d(0) = \infty$).

De asemenea, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\forall\, x \neq 0$ și

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3},\ \forall\, x \neq 0.$$

d) Considerăm funcția logaritmică $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și arătăm că ea *este derivabilă pe intervalul* $(0, \infty)$ și, în plus,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \ \forall\, x > 0 \tag{10}$$

Într-adevăr, pentru orice $x > 0$ avem $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

e) Funcțiile trigonometrice $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ *sînt derivabile pe* $\mathbb{R}$ *și pentru orice* $x \in \mathbb{R}$, avem

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{11}$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \tag{12}$$

Avem, într-adevăr, $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1 \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos \lim_{h\to 0} \left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$$

și, similar,

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \left[- \frac{2 \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}}{h} \right] =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\sin x.$$

Am utilizat de două ori limita binecunoscută $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$. Am făcut mai sus un abuz comod de notație, pe care îl vom mai folosi uneori. Scrierea corectă a formulelor (11), (12) este: $(\sin)'(x) = \cos x$; $(\cos)'(x) = -\sin x$.

Observație. Trebuie făcută distincția între numerele $f'(x_0)$ și $(f(x_0))'$, ultimul fiind nul ca derivată a unei funcții constante. Dacă f' există și este continuă pe un interval deschis care conține x_0, atunci $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, dar, în general, această relație nu are loc (putîndu-se întîmpla ca limita nici să nu existe).

Pentru funcția constantă $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin \frac{\pi}{4}$ avem $h'(x) = 0$ și nu $h'(x) = \cos \frac{\pi}{4}$; dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, atunci $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$, iar $f\left(\frac{\pi}{4}\right)' = \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)' = 0$. Similar, $(\ln 7)' = 0$ și $(\ln)'(7) = \frac{1}{7}$ [este greșit să se scrie $(\ln 7)' = \frac{1}{7}$, reproducînd mecanic formula (10); de fapt, scrierea corectă a formulei (10) este $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 0$].

2.2. Reguli de derivare

Vom arăta că pentru funcții $f, g : E \to \mathbb{R}$ derivabile, $E \subset \mathbb{R}$, funcțiile $f + g$, $f - g$, fg etc. au aceeași proprietate.

TEOREMA IV. 3. Presupunem că f, g sînt derivabile în punctul $x_0 \in E$ și λ o constantă.

Atunci:

(a) suma $f + g$ este derivabilă în x_0 și

(13) $$\boxed{(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}.$$

(b) λf este derivabilă în x_0 și

(14) $$\boxed{(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)}.$$

(c) produsul fg este funcție derivabilă în x_0 și

(15) $$\boxed{(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)}.$$

Demonstrație. a) Notăm $\Phi = f + g$. Trebuie calculat raportul

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

pentru $x \neq x_0$. Trecînd la limită ($x \to x_0$) ambele rapoarte din membrul drept au limită finită, anume $f'(x_0)$ și $g'(x_0)$. Atunci limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}$ există și este egală cu $f'(x_0) + g'(x_0)$, adică $\Phi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, deci formula (13).

Reținem deci că suma a două funcții derivabile $f, g : E \to \mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe E și derivata sumei este egală cu suma derivatelor; altfel scris,

(16) $$\boxed{(f + g)' = f' + g'}.$$

Relația (14) se demonstrează imediat: $(\lambda f)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lambda \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda f'(x_0)$; așadar,

$$(\lambda f)' = \lambda f' \tag{17}$$

adică, *o constantă „iese afară" de sub derivată.* Pentru $\lambda = -1$ avem $(-f)' = -f'$.

Probăm acum relația (15). Notăm $\psi = fg$.

$$(fg)'(x_0) = \psi'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) +$$

$$+ f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Am folosit faptul că g este continuă în x_0 (fiind derivabilă în x_0), deci $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Reținem totodată că dacă $f, g : E \to \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile pe E, atunci fg este derivabilă pe E și are loc regula de derivare a produsului

$$(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g' \tag{18}$$

Teorema este demonstrată. Reținem că rezultatele obținute într-un punct $x_0 \in E$ conduc la rezultate privind derivabilitatea funcțiilor $f + g$, λf, fg pe mulțimea E.

Prin inducție după k, se demonstrează imediat următorul

COROLAR. Dacă $f_1, f_2, \ldots, f_k$ sînt funcții derivabile în punctul x_0, atunci suma $f_1 + f_2 + \ldots + f_k$, respectiv produsul $f_1 f_2 \ldots f_k$ sînt derivabile în x_0 și, în plus:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \ldots + f_k'(x_0) \quad \text{și}$$

$$(f_1 f_2 \ldots f_k)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) \ldots f_k(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \ldots f_k(x_0) +$$

$$+ \ldots + f_1(x_0) f_2(x_0) \ldots f_{k-1}(x_0) f_k'(x_0).$$

Altfel scris, dacă f_j, $1 \leqslant j \leqslant k$, sînt derivabile pe E, atunci $\left(\sum\limits_{j=1}^{k} f_j\right)' = \sum\limits_{j=1}^{k} f_j'$,

$\left(\prod\limits_{j=1}^{k} f_j\right)' = \sum\limits_{j=1}^{k} (f_1 \ldots f_j' \ldots f_k)$. De exemplu, pentru $k = 3$, $(f_1 + f_2 + f_3)' =$

$= f_1' + f_2' + f_3'$ și $(f_1 f_2 f_3)' = f_1' f_2 f_3 + f_1 f_2' f_3 + f_1 f_2 f_3'$.

TEOREMA IV. 4. **Presupunem că f și g sînt derivabile în x_0 și că $g(x_0) \neq 0$. Atunci funcția-cît $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 și, în plus:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}. \tag{19}$$

Demonstrație. Notăm $h = \frac{f}{g}$; deoarece $g(x_0) \neq 0$ și g este continuă în x_0, rezultă că g este nenulă într-o vecinătate a punctului x_0 și deci are sens derivabilitatea cîtului în punctul x_0.

$$\text{Avem } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = h'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0)\right] \frac{1}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= [f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)] \frac{1}{g^2(x_0)}.$$

Demonstrația arată totodată că dacă f și g sînt derivabile pe E și g nu se anulează în nici un punct din E, atunci cîtul $\frac{f}{g}$ este derivabil pe E și, în plus,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}}. \tag{20}$$

În particular, luînd pentru f funcția constantă 1, rezultă

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{21}$$

în punctele unde g nu se anulează.

În acest moment știm să derivăm funcții reale polinomiale, funcții raționale, funcții trigonometrice etc.

Exemple

1) Funcția reală $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^{10} + 4x^5 - x + 9$ este o sumă finită de funcții de forma ax^n, deci este derivabilă pe $\mathbf{R}$; în plus, $f'(x) = 10x^9 + 20x^4 - 1$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, aplicînd regulile (16), (17), (7) și (8).

Similar, pentru funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -2x^6 + 3x^2 - 10x$, avem $g'(x) = -12x^5 + 6x - 10$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Pentru $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x + \sqrt{x})^2$ avem $f(x) = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + x$, deci $f'(x) = 2x + 3\sqrt{x} + 1$, $\forall x > 0$.

Similar, pentru funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3$, avem $g(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} - 1 = x - 3x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 1$, deci $g'(x) = 1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ pentru orice $x \neq 0$.

3) Pentru funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ avem $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$ și, ca atare, $(x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x, \forall x \in \mathbf{R}$, aplicînd regula de derivare a produsului. Similar, $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

4) Funcția rațională $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ este derivabilă în orice punct $x \in \mathbf{R}$ și aplicînd regula (20), $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$. Funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ este derivabilă în orice punct $x \notin \{-1, 1\}$ și $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$. În punctele $x = -1$, $x = 1$ funcția f nu este definită și nu se pune problema derivabilității lui f în aceste puncte.

5) În orice punct unde $\cos x \neq 0$ avem

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

aplicînd regulile (20), (11), (12). În mod similar, în punctele unde $\sin x \neq 0$ avem

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2.3. Derivarea funcției compuse și a inversei unei funcții

Trecem acum la stabilirea altor două teoreme generale de derivare, relativ la compunere și inversare. Deosebit de importantă este formula de derivare a funcțiilor compuse (funcții de funcție). În acest sens, are loc

TEOREMA IV. 5. Fie I, J intervale și $I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbf{R}$ două funcții. Dacă f este derivabilă în punctul $x_0 \in I$ și g este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$, atunci funcția compusă $G = g \circ f$ este derivabilă în x_0 și $G'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$. Dacă f este derivabilă pe I, g este derivabilă pe J, atunci $g \circ f$ este derivabilă pe I și are loc formula:

$$(22) \qquad \boxed{(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'}.$$

O scriere practică a regulii (22) este:

$$G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x), \quad \forall x \in I.$$

O schiță de demonstrație ar fi de a calcula limita citului $\dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ utilizînd relația $\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \dfrac{\Delta g}{\Delta f} \cdot \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ și făcînd $\Delta x \to 0$; rezultă $\Delta f \to 0$, deci

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta f} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = g'(f) \cdot f'.$$

Insuficiența acestui raționament constă în aceea că Δf se poate anula chiar de o infinitate de ori în vecinătatea unui punct.

Demonstrație. Avem de arătat că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Considerăm funcția ajutătoare $F : J \to \mathbf{R}$, definită prin

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & \text{dacă } y \neq y_0 \\ g'(y_0), & \text{dacă } y = y_0. \end{cases} \tag{23}$$

Funcția F este continuă în punctul y_0 deoarece

$$\lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = F(y_0).$$

Pe de altă parte, pentru orice $x \neq x_0$ avem

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = F(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{24}$$

Într-adevăr, dacă $f(x) = f(x_0)$, atunci ambii termeni sînt nuli, iar dacă $f(x) \neq f(x_0)$, atunci $f(x) \neq y_0$ și, conform (23), $F(f(x)) = \dfrac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0}$, deci relația (24) este dovedită în ambele cazuri. Trecînd la limită ($x \to x_0$) în relația (24) și observînd că $F(f(x)) \to$ $\to F(f(x_0)) = F(y_0) = g'(y_0)$, rezultă că

$$G'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Teorema IV.5 este demonstrată, formula (22) fiind o consecință directă a relației anterioare.

Formula stabilită mai sus ne permite să calculăm derivatele unor funcții mai complicate, obținute prin compunerea unor funcții ale căror derivate sînt cunoscute. Ea se extinde la compunerea unui număr finit oarecare de funcții derivabile. Astfel, dacă f, g, h sînt funcții astfel încît funcția $H = h \circ g \circ f$ să fie definită pe un interval I și dacă f este derivabilă în $x_0 \in I$, g derivabilă în $f(x_0)$ și h în punctul $g(f(x_0))$, atunci funcția compusă H este derivabilă în x_0 și, în plus,

$$H'(x_0) = (h \circ g \circ f)'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \tag{25}$$

Demonstrația este o simplă aplicare repetată a teoremei precedente. Anume, notînd $G = g \circ f$ avem $H = h \circ G$, deci $H'(x_0) = h'(G(x_0)) \cdot G'(x_0)$ și, ținînd cont că $G(x_0) = g(f(x_0))$, $G'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$, rezultă formula (25).

Exemple

1) Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = (2x^2 + x)^3$, $x \in \mathbf{R}$: considerînd funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x^2 + x$, $g(u) = u^3$, se observă că $G = g \circ f$, deci conform (22), $G'(x) =$ $= g'(f(x)) \cdot f'(x)$ și cum $g'(u) = 3u^2$, rezultă $G'(x) = 3 \cdot f(x)^2 \cdot f'(x) = 3(2x^2 + x)^2 \cdot (4x + 1)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \sin \alpha x$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, constant). Așadar, $G(x) = \sin u(x)$, unde $u(x) = \alpha x$, deci $G'(x) = \cos u(x) \cdot u'(x) = \alpha \cos \alpha x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Similar, pentru $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $G(x) = \sin^2 x$, avem $G(x) = v^2(x)$, unde $v(x) = \sin x$, deci $G'(x) = 2v(x) \cdot v'(x) = 2 \sin x \cos x$.

3) Considerăm $H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $H(x) = \cos^2 3x$, $x \in \mathbf{R}$. În acest caz funcția H este compunerea funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3x$; $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(u) = \cos u$; $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h(v) = v^2$, deci $H = h \circ g \circ f$. Dar $f'(x) = 3$, $g'(u) = -\sin u$, $h'(v) = 2v$ și aplicînd formula (25) rezultă $H'(x) = 2(\cos 3x)\,(-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \sin 6x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Stabilim acum o ultimă teoremă importantă de derivare. Reamintim că dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție continuă și strict monotonă pe un interval I, atunci mulțimea $J = \{f(x) \mid x \in I\}$ este, de asemenea, un interval; $f : I \to J$ este bijectivă și inversa ei $g = f^{-1} : J \to I$ este o funcție continuă (conform teoremei III.7). Ce se poate spune despre g dacă funcția f este derivabilă? În acest sens are loc

TEOREMA IV. 6. Fie $f : I \to J$ o funcție continuă și bijectivă între două intervale. Presupunem că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ și $f'(x_0) \neq 0$, atunci inversa $g = f^{-1}$ este derivabilă în punctul $y_0 = f(x_0)$ și, în plus,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{26}$$

Demonstrație. Bineînțeles, trebuie examinată existența limitei raportului $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ cînd y tinde către y_0, $y \neq y_0$. Fie $x = f^{-1}(y)$; din faptul că $y \neq y_0$, rezultă $x \neq x_0$ și, în plus,

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}. \tag{27}$$

Făcînd $y \to y_0$, rezultă $g(y) \to g(y_0)$ adică $x \to x_0$ și ultimul raport tinde către $\frac{1}{f'(x_0)}$. Atunci primul raport din relația (27) va avea limită, deci funcția g este derivabilă în punctul y_0. Totodată se deduce relația (26).

Relația (26) poate fi scrisă ca egalitate de funcții astfel: $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$, dacă ipotezele teoremei IV.6 au loc în orice punct din I.

Observație. Dacă în enunț renunțăm la ipoteza $f'(x_0) \neq 0$, se observă din demonstrația anterioară că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci $g'(y_0) = +\infty$ sau $-\infty$ (după cum f este strict crescătoare sau strict descrescătoare), adică în punctul $y_0 = f(x_0)$ graficul funcției inverse are o tangentă verticală.

Consecințe

1) Considerăm funcția $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, definită prin $f(x) = \sin x$. În orice punct $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sînt verificate condițiile teoremei IV.6, deci funcția $f^{-1} = \arcsin$ este derivabilă în orice punct $y_0 \in (-1, 1)$. În plus, aplicînd formula (26) și notînd $y_0 = \sin x_0$, deci $\arcsin y_0 = x_0$, rezultă $(\arcsin)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}$, $\forall\, y_0 \in (-1, 1)$.

Pentru $y_0 = -1$ avem $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ și $f'(x_0) = 0$ și conform observației anterioare, $(\arcsin)'(-1) = \infty$. În mod similar, $(\arcsin)'(+1) = \infty$.

Reținem, așadar, formula

(28) $$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall\, x \in (-1, 1)}.$$

Raționînd în mod similar sau aplicînd formula $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, rezultă

(29) $$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall\, x \in (-1, 1)}.$$

Fie acum funcția $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, care satisface condițiile teoremei IV.6 pentru $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $J = \mathbf{R}$, în orice punct $x_0 \in I$. Inversa ei, $\operatorname{arctg} : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă derivabilă în orice punct $y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 = \operatorname{tg} x_0$ și, în plus,

$$(\operatorname{arctg})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x_0}} = \cos^2 x_0 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

Cu notații schimbate, am demonstrat formula

(30) $$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},\ \forall\, x \in \mathbf{R}}$$

În mod similar, sau aplicînd formula $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, avem $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

2) Fie $I = (0, \infty)$, $J = \mathbf{R}$ și $f : I \to J$, $f(x) = \ln x$. Conform teoremei IV.6 ale cărei condiții sînt verificate în orice punct $x_0 \in I$, rezultă că funcția exponențială $f^{-1} = \mathrm{EXP}$ este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și, în plus, $\forall\, y_0 \in \mathbf{R}$, $y_0 = \ln x_0$ avem

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}.$$

Cu alte cuvinte, am demonstrat formula

(31) $$\boxed{(e^x)' = e^x,\ \forall\, x \in \mathbf{R}}.$$

3) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n (n \geqslant 1)$ întreg. Notînd $I = [0, \infty)$, $J = [0, \infty)$, avem o aplicație continuă și bijectivă $f : I \to J$, derivabilă în orice

punct $x_0 > 0$ și $f'(x_0) = nx_0^{n-1} \neq 0$. Conform teoremei IV.6, f^{-1} este derivabilă în $y_0 = f(x_0) = x_0^n$ și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y_0^{n-1}}}$. Așadar, pentru orice $x > 0$ avem $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Conform observației anterioare, funcția $g : [0,\infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt[n]{x}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ și avem $g_d(0) = \infty$, dacă n este par și $g'(0) = \infty$, dacă n este impar.

2.4. Prezentarea sintetică a derivatelor funcțiilor uzuale și a regulilor de derivare

I. *Reguli de derivare* (fără a mai preciza condițiile în care au loc)

1°. $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$;

2°. $(fg)' = f'g + fg'$;

3°. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;

4°. $(g(f))' = g'(f) \cdot f'$; $(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$.

II. *Tabloul de derivare al funcțiilor elementare:*

Funcția	Derivata	Domeniul de derivabilitate
c (constantă)	0	$\mathbf{R}$
x	1	$\mathbf{R}$
x^n, $n \geqslant 1$ întreg	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$
x^r, r real	rx^{r-1}	cel puțin $(0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(0, \infty)$
e^x	e^x	$\mathbf{R}$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\cos x \neq 0$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\sin x \neq 0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1 + x^2}$	$\mathbf{R}$

Toate aceste derivate au fost calculate anterior, cu excepția derivatei funcției $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x) = a^x (a > 0,\ a \neq 1$ constant). În acest caz avem $\ln f(x) = x \ln a$ și, derivînd în raport cu x, rezultă $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln a$, deci $f'(x) = f(x) \cdot \ln a$, adică $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Funcția putere poate fi definită și astfel: $x^r = e^{r \ln x},\ x > 0$ și, ca atare, $(x^r)' = e^{r \ln x} \cdot r \cdot \frac{1}{x} = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} = rx^{r-1}$; regăsim formula (9).

Teorema de derivare a funcțiilor compuse împreună cu tabloul anterior permite obținerea următoarelor formule utilizate curent (unde $u = u(x)$ este o funcție derivabilă).

Tabloul de derivare al funcțiilor compuse

Funcția	Derivata	
u	u'	
$u^n,\ n \geqslant 1$ întreg	$nu^{n-1} \cdot u'$	
$u^r,\ r$ real	$ru^{r-1} \cdot u'$	$(u > 0)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u > 0)$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	$(u > 0)$
e^u	$e^u \cdot u'$	
$a^u,\ a > 0,\ a \neq 1$	$a^u \cdot u' \cdot \ln a$	
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	
$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\cos u \neq 0)$
$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	$(\sin u \neq 0)$
$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(u^2 < 1)$
$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(u^2 < 1)$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	
$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$	

Adăugăm că dacă u, v sînt funcții derivabile și $u > 0$, atunci funcția $u^v = e^{v \ln u}$ are derivata

$$(u^v)' = e^{v \ln u}\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v \frac{u'}{u}\right),$$

formulă care rezultă aplicînd teorema de derivare a funcțiilor compuse funcției $e^{v \ln u}$ și ținînd cont că $(v \ln u)' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$.

Începînd din acest moment ar trebui să știți să calculați derivata oricărei funcții elementare!

Prezentăm, pe scurt, noțiunea de *diferențială a unei funcții.*

Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă într-un punct $x_0 \in (a, b)$.

Avem

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

deci are loc formula aproximativă $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \simeq f'(x_0)$, adică

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0), \tag{32}$$

sau, echivalent, $\Delta f \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x$, în vecinătatea lui x_0.

Se numește *diferențiala lui f în* x_0 aplicația $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $T(h) = f'(x_0) \cdot h$ și se notează $T = \mathrm{d}f(x_0)$; așadar, $\forall h \in \mathbf{R}$, $\mathrm{d}f(x_0)\ (h) = f'(x_0) \cdot h$.

În cazul particular cînd $f(x) = x$, avem $f'(x_0) = 1$ și, ca atare, $\mathrm{d}x(x_0)\ (h) = h, \forall\, h \in \mathbf{R}$. Rezultă formula

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x(x_0) \text{ (egalitate de aplicații } \mathbf{R} \to \mathbf{R}). \tag{33}$$

Formula (32) se mai scrie: $\Delta f \simeq f'(x_0) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x_0)\ (\Delta x)$; se spune că diferențiala lui f aproximează creșterea lui f. Dacă f este derivabilă în orice punct din (a, b), atunci relația (33) se scrie:

$$\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x, \tag{34}$$

ceea ce explică notația $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, amintită la pagina 123.

Exemple. 1) Diferențiala funcției f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2$ în punctul $x_0 = 1$ este aplicația $T = \mathrm{d}f(1)$ definită prin $T(h) = f'(1) \cdot h$, adică $T(h) = 7h, \forall\, h \in \mathbf{R}$.

2) Pentru $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + \sin 3x$, avem $\mathrm{d}f = (2x + 3 \cos 3x)\mathrm{d}x$; similar, $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}(e^x) = e^x\,\mathrm{d}x$.

Regulilor de derivare le corespund reguli de diferențiere. Dacă f și g sînt funcții derivabile pe un interval deschis, atunci:

$$\mathrm{d}(f + g) = (f + g)'\mathrm{d}x = (f' + g')\mathrm{d}x = f'\mathrm{d}x + g'\mathrm{d}x = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g;$$

$$\mathrm{d}(f - g) = \mathrm{d}f - \mathrm{d}g; \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{R},\ \mathrm{d}(\lambda f) = \lambda \mathrm{d}f;$$

$$\mathrm{d}(fg) = (fg)'\mathrm{d}x = (fg' + f'g)\mathrm{d}x = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f;$$

în punctele unde funcția g este nenulă, avem: $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\mathrm{d}f - f\mathrm{d}g}{g^2}$.

Dacă $G = g(u)$ și $u = f(x)$ cu f, g derivabile (ca în teorema IV.5), atunci regula derivării funcțiilor compuse se mai scrie:

$$G'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \text{ adică } \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

2.5. Derivate de ordin superior

Fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe mulțimea $E \subset \mathbf{R}$. În acest caz este definită derivata f': $E \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ a funcției f. Funcția f se numește *derivabilă de două ori* într-un punct $x_0 \in E$ dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 și f' este derivabilă în x_0; în acest caz, derivata lui f' în

punctul x_0 se numește *derivata a doua* (sau *de ordinul doi*) a lui f în x_0 și se notează $f''(x_0)$. Dacă f' este derivabilă pe E, atunci derivata lui f' se numește *derivata a doua* a lui f și se notează cu f''. În mod similar se definesc $f''' = (f'')'$, $f^{(4)} = (f''')'$ și, prin inducție, se definește derivata de ordin n, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, $n \geqslant 2$. Uneori se mai scrie $\frac{d^n f}{dx^n}$ în loc de $f^{(n)}(x)$. Prin convenție se definește derivata de ordin zero $f^{(0)} = f$ și derivata de ordin 1, $f^{(1)} = f'$ (se scrie uneori $f^{(2)}$ în loc de f'' și $f^{(3)}$ în loc de f'''). Dacă pentru orice $n \in \mathbf{N}$, funcția f este de n ori derivabilă, atunci se spune că f este *indefinit derivabilă*.

Exemple

1) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 20x + 4$. Avem $f'(x) = 3x^2 + 2x - 20$, $f''(x) = 6x + 2$, $f'''(x) = 6$, $f^{(n)}(x) = 0, \forall\, n \geqslant 4, \forall\, x \in \mathbf{R}$.

Se verifică imediat că toate derivatele unor funcții polinomiale sînt funcții polinomiale și derivatele de ordin strict mai mare decît gradul polinomului sînt identic nule. De asemenea, derivatele unor funcții raționale sînt funcții raționale.

2) Notînd cu D operația de derivare, prin care unei funcții derivabile i se asociază derivata ei, se mai folosesc uneori notațiile lui A. Cauchy (1789—1857): $Df = f'$, $D^2 f = D(Df) = Df' = f''$, $D^n f = f^{(n)}$, $\forall\, n \geqslant 1$. De exemplu, $Dx^3 = 3x^2$, $D(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = a_0 n x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, pentru orice constante reale a_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $D^2 x^4 = D(4x^3) = 12x^2$, $D^n e^x = e^x$, $\forall\, n \geqslant 1$.

3) Ne propunem să rezolvăm ecuația $f''(x) = 0$ pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. În acest caz, $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și soluțiile ecuației date sînt $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) Arătăm, prin inducție după $n \geqslant 1$ natural, că $D^n \sin(\omega x + \varphi) = \omega^n \cdot \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$, unde ω și φ sînt constante. Pentru $n = 1$ avem de probat că $D \sin(\omega x + \varphi) = \omega \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, adică $\omega \cos(\omega x + \varphi) = \omega \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$, ceea ce este evident.

Presupunem afirmația dovedită pentru n și avem de arătat că $D^{n+1} \sin(\omega x + \varphi) = \omega^{n+1} \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$. Dar $D^{n+1} \sin(\omega x + \varphi) = D(D^n \sin(\omega x + \varphi)) = D\left(\omega^n \sin\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)\right) = \omega^{n+1} \cdot \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$; este deci suficient să observăm că $\sin\left(\omega x + \varphi + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\omega x + \varphi + \frac{n\pi}{2}\right)$, ceea ce rezultă din faptul că $\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$, $\forall\, a \in \mathbf{R}$.

5) Calculăm $f^{(n)}(0)$ pentru funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Avem $f^{(0)} = f$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$

și, prin inducție, se verifică imediat că $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$, $\forall\, x \neq -1$.

În punctul $x = 0$ avem $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$.

Deci, funcțiile polinomiale, exponențiale, logaritmice, trigonometrice sînt derivabile pe orice interval deschis conținut în domeniul maxim de definiție.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 2)

1. Să se calculeze derivata următoarelor funcții $f : E \to \mathbf{R}$ (indicînd domeniul maxim de definiție E pentru funcție și mulțimea $F \subset E$ a punctelor unde f este derivabilă):

a) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$;

b) $f(x) = x^{100} + \frac{1}{25} x^{50} + 1$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$;

d) $f(x) = 5x + \sin x$;

e) $f(x) = 2x^2 + \cos x$;

f) $f(x) = x \cos x$;

g) $f(x) = x + \ln 2 + x \ln 2$;

h) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$;

i) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$;

j) $f(x) = x^2 \ln x$;

k) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$;

l) $f(x) = \frac{x^2}{x+2} + \frac{7}{x-1}$;

m) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$;

n) $f(x) = \sin x \cos x + x$;

o) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$;

p) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$;

q) $f(x) = 3 \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$;

r) $f(x) = \frac{1}{x^{1987} + 1}$.

2. Să se determine rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ pentru funcțiile următoare $f : E \to \mathbf{R}$ (E fiind mulțimea punctelor unde f este definită și derivabilă):

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;

e) $f(x) = x \ln x$;

b) $f(x) = \frac{x}{2x^2+5x+2}$;

f) $f(x) = x + \cos x$;

c) $f(x) = \frac{7x^2 + 20x}{x^2 + 2x - 3}$;

g) $f(x) = \sin x + \cos x$;

d) $f(x) = xe^x$;

h) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

3. a) Presupunem că $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și că $f(x) = (x+2) \cdot g(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ unde g este derivabilă în origine și $g(0) = 2$, $g'(0) = -1$. Să se calculeze $f'(0)$.

b) Dacă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și $f(x) = x^2 g(x) + \frac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și dacă g este derivabilă în $x = 1$, $g(1) = 1$, $g'(1) = 2$, să se calculeze $f'(1)$.

4. Să se indice domeniul maxim de definiție pentru funcțiile f și f' în fiecare din cazurile (vezi enunțul exercițiului 1):

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

b) $f(x) = \sqrt{|x|}$;

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$;

d) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$;

e) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$;

f) $f(x) = \frac{1-x^3}{x^4}$;

g) $f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$;

h) $f(x) = (1+\sqrt{x}+x)^2$.

5. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $f(x) = x - |x|$, $g(x) = x + |x|$. Să se arate că $f + g$ și fg sînt derivabile pe $\mathbf{R}$, deși f, g nu sînt derivabile în punctul $x = 0$.

6. Să se arate că, deși funcția $g : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ nu este derivabilă în $x = 0$, totuși funcția $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = xg(x)$ este derivabilă în $x = 0$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

Să se arate că deși f este derivabilă în punctul $x = 0$, totuși limita $\lim_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

8. Să se scrie ecuația tangentei la graficele indicate în punctele respective:

a) $y = x^2$, $x_0 = 1$;

b) $y = x + \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;

c) $y = \frac{x}{x^3+1}$, $x_0 = -2$;

d) $y = \ln x$; $x_0 = 1$;

e) $y = e^x$, $x_0 = 0$;

f) $y = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$.

9. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4x + c$ (c constantă). Să se afle c astfel încît graficele lui f și g să aibă o tangentă comună într-un punct comun.

Idem pentru $f, g : [-c, c] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - \sqrt{c^2 - x^2}$, $c > 0$.

10. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze derivatele funcțiilor următoare (vezi enunțul exercițiului 1):

a) $f(x) = (x^5 - 1)^3$;

b) $f(x) = \sqrt{-4x}$;

c) $f(x) = \sin(2x + 5)$;

d) $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$;

e) $f(x) = \sin^3 x + \cos^6 x$;

f) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$;

g) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

h) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{50}$;

i) $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{50}$;

j) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$;

k) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

l) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$;

m) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

n) $f(x) = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x$;

o) $f(x) = \sin(\cos x)$;

p) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^2+1}$;

q) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} 2x$;

r) $f(x) = \ln(5x^2 + x)$;

s) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

t) $f(x) = \ln(\ln x)$;

u) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+16}\right)$;

v) $f(x) = e^{x-x^2}$;

w) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$;

x) $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$;

y) $f(x) = \left(\dfrac{e^x+1}{e^{2x}+1}\right)^2$;

z) $f(x) = 3^{x^2+x+1} + 2^{\sqrt{x^2+1}}$.

11. Să se calculeze derivatele următoarelor funcții $f : E \to \mathbf{R}$ în punctele indicate (E fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{x+1}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = \sqrt{3}$;

c) $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x}} + \ln\sqrt{x}$, $x_0 = 1$;

d) $f(x) = (1+x^2)\cdot\operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \dfrac{a\sin x + b}{b\cos x + a}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (unde a, b sînt constante, $a \neq 0$);

f) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x_0 = 0$;

g) $f(x) = x\ln\dfrac{2x+1}{2x-1}$, $x_0 = -1$.

12. Să se arate că funcțiile $f : (1, \infty) \to (0, \infty)$, $g : (0, \infty) \to (1, \infty)$ definite prin $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(y) = \sqrt{y^2+1}$ sînt inverse ($g = f^{-1}$) și să se verifice că $g'(f(x))\cdot f'(x) = 1$, $\forall\, x > 1$, și $f'(g(y))\cdot g'(y) = 1$, $\forall\, y > 0$.

13. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. Să se arate că $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și că f este bijectivă. Să se calculeze $(f^{-1})'(4)$ și să se arate că $(f^{-1})'(y) > 0$, $\forall\, y \in \mathbf{R}$.

14. Să se calculeze: a) diferențialele $df(x_0)$ pentru funcțiile $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ indicate: $f(x) = x^2 + 5x$, $x_0 = 1$; $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$, $x_0 = 0$; $f(x) = e^{2x} - x^2$, $x_0 = 0$;

b) diferențialele df pentru $f(x) = x^3 - x$; $f(x) = x + \ln(x^2+1)$; $f(x) = \cos 2x - \cos^2 x$.

15. a) Să se arate că funcția $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \longmapsto y(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ (A, B, ω fiind constante) verifică relația $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

b) Să se afle $p, q \in \mathbf{R}$ știind că funcția $y(x) = e^{-2x}\sin 3x$ verifică relația $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) Pentru ce constantă reală a funcția $y(x) = e^{ax}$ verifică relația $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$? Idem, $y(x) = xe^{ax}$ verifică relația $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0$.

16. Să se rezolve (în $\mathbf{R}$) ecuațiile $f'(x) = 0$ și $f''(x) = 0$ pentru fiecare din funcțiile $f : E \to \mathbf{R}$ următoare (unde E este mulțimea punctelor unde f este de două ori derivabilă):

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$;

b) $f(x) = x \ln x$;

c) $f(x) = x^2 + \ln x$;

d) $f(x) = \sin x - \cos x$;

e) $f(x) = \ln \sin x$;

f) $f(x) = \ln(x^2 + x)$;

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$;

h) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$;

i) $f(x) = e^{x - \sqrt{x}}$;

j) $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$;

k) $f(x) = \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$;

l) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

17. Să se calculeze derivata de ordin $n (n \geqslant 1)$ pentru funcțiile $f : E \to \mathbf{R}$ următoare (precizînd mulțimea E a punctelor unde f este de n ori derivabilă):

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;

b) $f(x) = x^n$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

d) $f(x) = \sin x$;

e) $f(x) = e^{ax} (a \in \mathbf{R}$ constant);

f) $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$;

h) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{x^2 - 1}$.

18. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale, distincte două cîte două, $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ și $f : E \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x - a_1} + \dfrac{1}{x - a_2} + \ldots + \dfrac{1}{x - a_n}$, unde $E = \mathbf{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

a) Să se arate că funcția f este indefinit derivabilă pe E și că $f'(x) < 0$, $\forall\, x \in E$

b) Să se arate că $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ și că $P(x) \cdot P''(x) < P'(x)^2$, pentru orice $x \in E$.

19. Fie $f, g : (a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b$ două funcții de n ori derivabile pe intervalul (a, b). Să se arate, prin inducție după întregul $n \geqslant 1$, că $\forall\, x \in (a, b)$,

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \quad \textit{(regula lui Leibniz)}.$$

§ 3. Aplicații directe ale derivatelor

a) *Viteza și accelerația unui mobil*

Considerăm o axă Δ pe care au fost fixate o origine, un sens și o unitate de măsură. Fie un mobil (asimilabil cu un punct de pe Δ); notînd cu $s(t)$ abscisa punctului unde se află mobilul la momentul t (numită și spațiul parcurs de mobil) și presupunînd că s este o funcție derivabilă într-un punct t_0, atunci se definește *viteza instantanee* $v(t_0)$ a mobilului la momentul t_0 ca fiind derivata spațiului în t_0, adică

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Dacă funcția s este de două ori derivabilă în t_0, atunci $s''(t_0) = v'(t_0)$ se numește *accelerația* mobilului la momentul t_0.

Reținem că într-o mișcare rectilinie viteza este derivata de ordin întîi, iar accelerația derivata de ordinul doi, a spațiului în raport cu timpul.

Aceste definiții constituie o aplicare firească a definiției I.1 la modelul fizic considerat.

Exemplu

Presupunem că legea de mișcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relația $s(t) = e^{-t}\cos t$. Vrem să determinăm accelerația mobilului după 2 secunde și să calculăm limita vitezei cînd t tinde către ∞.

Avem $v(t) = s'(t) = -e^{-t}\cdot\cos t - e^{-t}\cdot\sin t = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$ și $a(t) = v'(t) = 2e^{-t}\cdot\sin t$, deci $a(2) = \frac{2\sin 2}{e^2}$ și $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = -\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\cos t + \sin t}{et}$ și această limită este nulă, deoarece $\left|\frac{\cos t + \sin t}{et}\right| \leqslant \frac{2}{et}$, $\forall\, t$ (se mai spune că mișcarea se amortizează pentru $t \to \infty$).

b) *Intensitatea curentului electric*

Notînd cu $Q(t)$ sarcina care trece printr-o secțiune a unui conductor în intervalul de timp $[0, t]$, atunci pentru orice momente distincte t_1, t_2, diferența $Q(t_2) - Q(t_1)$ este sarcina care a trecut între momentele t_1, t_2, iar cîtul $\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$ este sarcina medie raportată la intervalul de timp dintre momentele t_1, t_2. În analogie cu modelul mecanic anterior, dacă fixăm un moment t_0 și presupunem că funcția Q este derivabilă în t_0, atunci derivata $Q'(t_0)$ este viteza de variație a sarcinii electrice la momentul t_0, $Q'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0}\frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$. Ea primește denumirea specifică de *intensitate* a curentului electric la momentul t_0, $i(t_0) = Q'(t_0)$.

Dacă se consideră un circuit electric constînd dintr-o inductanță L, o capacitate C și o rezistență R, tensiunea fiind constantă, atunci din legea a doua

a lui Kirchhoff rezultă că intensitatea $i(t)$ a curentului prin acel circuit va verifica relația (numită ecuație diferențială).

$$Li''(t) + Ri'(t) + Ci(t) = 0, \quad \forall\, t.$$

Se pune atunci problema determinării funcției $i(t)$, cunoscînd L, R, C, ceea ce necesită dezvoltări ale aparatului analizei matematice.

c) *Densitatea liniară de masă*

Considerăm o masă materială presupusă repartizată pe o bară, asimilată cu un interval $[a, b]$. Pentru orice punct $x \in [a, b]$ notăm cu $m(x)$ masa porțiunii cuprinsă în intervalul $[a, x]$. Fixînd un punct $x_0 \in (a, b)$, raportul $\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$, $x \neq x_0$ reprezintă densitatea medie de masă între punctele x, x_0.

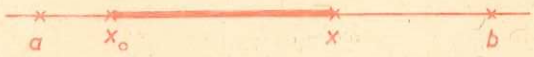


Fig. IV.9

Pe intervale „mici" putem presupune că masa este repartizată omogen și idealizarea acestui fapt o constituie considerarea limitei

$$\rho(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

(în ipoteza că există). În acest caz se obține o caracteristică importantă, numită *densitatea liniară de masă* în punctul x_0. Așadar, $\rho(x_0) = m'(x_0)$.

Exemplu. Presupunem că pe intervalul $[0, 4]$ este repartizată o masă materială astfel încît $m(x) = x^3 + 3x$; atunci densitatea în punctul $x_0 = 2$ este $\rho(2) = m'(2) = (3x^2 + 3)\,|_{x=2} = 15$. (Uneori în loc de $f(a)$ se scrie $f(x)\,|_{x=a}$.)

În toate considerațiile anterioare am omis unitățile de măsură.

d) *Aplicații în economie.* Deși în economie apar de obicei funcții cu valori discrete (costurile și beneficiile fiind exprimate în unități monetare, de pildă în lei), se pot considera funcții continue sau chiar derivabile cu valori în $\mathbf{R}$ care le prelungesc. Aceasta permite utilizarea metodelor analizei matematice.

1°. Notăm cu $\beta(x)$ beneficiul realizat pentru o cheltuială de x lei. Pentru orice cheltuială suplimentară de h lei, beneficiul suplimentar pe leu cheltuit este egal cu $\frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$. Dacă h este „suficient de mic", atunci acest raport dă o indicație dinamică asupra variației beneficiului corespunzător sumei x. Dacă există, limita

$$\beta'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\beta(x + h) - \beta(x)}{h}$$

se numește *beneficiul marginal* corespunzător sumei cheltuite x.

2°. Fie $\gamma(p)$ costul total pentru producerea a p unități dintr-un produs. Pentru a putea controla creșterea sau descreșterea producției, este util de știut cît costă producerea suplimentară a încă h unități din acel produs; atunci costul pe unitatea suplimentară de produs este $\frac{\gamma(p + h) - \gamma(p)}{h}$ și limita acestuia cînd $h \to 0$ (dacă există), adică $\gamma'(p)$, este un indicator economic important, numit *costul marginal* al producției pentru p unități ale produsului considerat.

Desigur modelele prezentate sînt foarte simplificate, pentru că în realitate funcţiile $\beta(x)$, $\gamma(p)$ pot fi determinate doar empiric, tabelate prin date experimentale şi în mod necesar trebuie să se ţină cont de prezenţa în model a elementelor aleatorii.

Observaţii. Uneori viteza (sau, cum se mai spune, rata) de creştere a unei mărimi fizice sau economice se dovedeşte a fi la fel de importantă ca şi măsura acelei mărimi. (De exemplu, este util de ştiut că ai de parcurs 200 km, dar este important de ştiut şi cu ce viteză te deplasezi.) Multe teorii fizice sau prognoze economice sînt exprimate prin legi de creştere care utilizează derivatele unor mărimi alese convenabil.

Considerăm utilă o sinteză a exemplelor anterioare, arătînd cum noţiuni din limbajul curent se dovedesc a fi în fond derivate ale anumitor funcţii: viteza este derivata spaţiului, acceleraţia — derivata vitezei, densitatea liniară de masă — derivata masei ca funcţie de lungime, intensitatea unui curent electric — derivata cantităţii de electricitate în raport cu timpul, coeficientul unghiular al tangentei la graficul unei funcţii $y = y(x)$ este $y'(x)$, costul marginal al producţiei — derivata costului total în raport cu cantitatea de produse etc.

e) *Aplicaţii la calcule aproximative*

Dacă f este o funcţie derivabilă într-un punct x_0, am văzut că are loc formula aproximativă

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \tag{35}$$

pentru orice x „suficient de apropiat" de x_0. În membrul drept al formulei (35) se află o funcţie de gradul I în x şi, de aceea, se mai spune că (35) este formula de *aproximare liniară* a lui f în jurul punctului x_0.

Exemple

1) Pentru unghiuri θ „mici" se acceptă aproximarea $\sin\theta \simeq \theta$. Aceasta rezultă direct aplicînd formula (35) funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\theta) = \sin\theta$ în jurul originii $\theta_0 = 0$; într-adevăr $f(\theta_0) = 0$, $f'(\theta_0) = 1$ şi, ca atare, $\sin\theta \simeq \theta$.

2) Indicăm aproximarea liniară a funcţiei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ în jurul punctului $x_0 = 0$. Avem $f(x_0) = e^0 = 1$ şi $f'(x_0) = e^x|_{x=0} = 1$, deci $e^x \simeq 1 + (x - 0)$, adică $e^x \simeq 1 + x$ (fig. IV. 10).

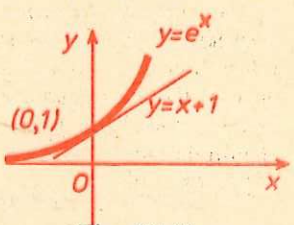


Fig. IV.10

3) Indicăm aproximarea liniară a funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + x + \cos x$ în jurul punctului $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Aici $f(x_0) = \pi^2 + \frac{\pi}{2}$, $f'(x_0) = 4\pi$, deci $4x^2 + x + \cos x \simeq$

$$\simeq \pi^2 + \frac{\pi}{2} + 4\pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 4\pi x - \pi^2 + \frac{\pi}{2}.$$

În general, dacă evoluţia unui proces fizic este descrisă printr-o funcţie derivabilă f, „a liniariza" acest proces la un moment t_0, înseamnă a înlocui $f(t)$ cu aproximarea liniară $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$, pentru orice t dintr-o vecinătate a lui t_0.

4) Calculăm cu aproximaţie $\sqrt{9{,}14}$ şi pentru aceasta considerăm funcţia $f:(0, \infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şi punctul $x_0 = 9$. Avem $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, deci $f'(x_0) = \frac{1}{6}$. Formula (35) devine în acest caz $\sqrt{x} \simeq \sqrt{9} + \frac{1}{6}(x - 9)$, adică $\sqrt{x} \simeq \frac{x + 9}{6}$, deci $\sqrt{9{,}14} \simeq \frac{9{,}14 + 9}{6} \simeq 3{,}023$.

5) Calculăm cu aproximație $\sin 47°$ și pentru aceasta considerăm funcția $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ și $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Avem $f'(x_0) = \cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și, ca atare, $\sin x \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; pentru $x = 47° = 45° + 2° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}$, avem $\sin 47° \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{90} \simeq 0{,}7317$ (subliniem că în analiza matematică unghiurile se măsoară numai în radiani).

EXERCIȚII (capitolul IV, § 3)

1. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^2 - 2t + 1$, $\forall\, t \geqslant 0$. Să se calculeze viteza și accelerația mobilului la momentul $t = 1$. Cum se explică rezultatul obținut?

2. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = e^{kt}\cdot\cos 2t$, $\forall\, t \in \mathbf{R}$. Să se determine constanta k știind că $s''(t) + 2s'(t) + 5s(t) = 0$, $\forall\, t$. Apoi să se calculeze viteza și accelerația mobilului la momentele $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$ și pentru $t \to \infty$.

3. Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este $s(t) = t^3 - 12t^2 + 4$. La ce moment accelerația sa este nulă? Care este valoarea minimă a vitezei acelui mobil?

4. Presupunem că masa de repaus a unei particule este m_0. Dacă viteza particulei este v, atunci în teoria relativității se arată că masa particulei este $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (unde c este viteza luminii). Să se determine $\frac{dm}{dv}$ pentru $v = \frac{1}{3}c$ și $\frac{dm}{dt}$, dacă $v = \frac{1}{3}c$ și $\frac{dv}{dt} = 16\sqrt{2}\ \text{m/s}^2$.

5. Presupunem că la fiecare moment t cantitatea de electricitate scursă printr-un conductor este $Q(t) = 2\cos \pi t$. Să se determine intensitatea curentului; la ce momente de timp intensitatea este maximă? Dar minimă?

6. Să se determine aproximările liniare ale funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare, în jurul punctelor indicate:

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = x^2 + 2\sin x$, $x_0 = 0$;
d) $f(x) = e^x + 2x + \cos x$, $x_0 = 0$;
e) $f(x) = e^{2x+2} - x - 3$, $x_0 = -1$;
f) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $x_0 = 0$.

7. Să se calculeze: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 + \sin x - \cos x}{x}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x} - 2}{x - 1}$, folosind aproximarea liniară a funcțiilor $f(x)$ de la numărător.

8. Să se calculeze cu aproximație: $\sqrt{4{,}17}$, $\sqrt[3]{29}$, $\ln 1{,}11$, $\sin 33°$, $\cos 56°$.

§ 4. Proprietăţile funcţiilor derivabile

După cum am studiat în capitolul III proprietăţile generale ale funcţiilor continue, adică proprietăţile valabile pentru orice funcţie continuă, tot aşa vom analiza, în cele ce urmează, unele proprietăţi generale ale funcţiilor derivabile. În particular, vom da metode de determinare a punctelor de maxim şi minim, a intervalelor de monotonie, a intervalelor de convexitate etc. ale unei funcţii, în care rolul derivatelor este esenţial.

Unele din teoremele care urmează sînt intuitiv evidente (folosind de regulă interpretarea geometrică a derivatei) şi demonstraţiile lor pot fi la început omise, insistînd pe înţelegerea enunţurilor.

4.1. Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

Într-o serie de probleme tehnice sau economice, şi bineînţeles în matematică, este important de ştiut care sînt maximele şi minimele anumitor mărimi variabile. După ce problemele capătă o formulare matematică, adeseori ele se reduc la determinarea punctelor de extrem ale anumitor funcţii. Sînt necesare în prealabil cîteva definiţii precise.

DEFINIŢIA IV.4. Fixăm o funcţie $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}$). Un punct $x_0 \in A$ se numeşte punct de maxim relativ (respectiv de minim relativ) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încît pentru orice $x \in U \cap A$ să avem

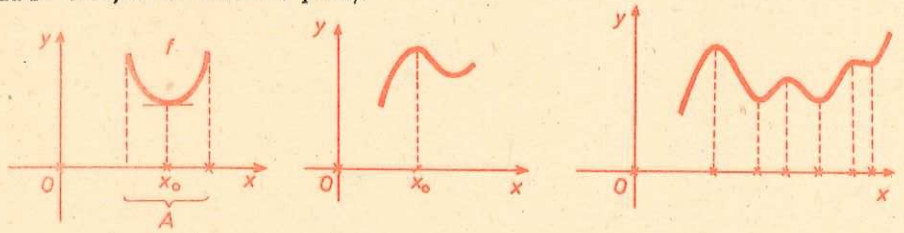
$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ (respectiv } f(x) \geqslant f(x_0)). \tag{36}$$

În acest caz, valoarea $f(x_0)$ se numeşte un *maxim* (respectiv un *minim*) relativ al lui f.

Punctele de maxim sau de minim relativ se mai numesc *puncte de extrem relativ*. Dacă inegalităţile (36) sînt stricte (pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$), se spune că x_0 este un punct de extrem strict.

Valorile funcţiei în punctele ei de extrem relativ se mai numesc *extremele* relative ale funcţiei.

Observaţii. 1) Faptul că funcţia considerată este cu valori reale este esenţial (folosindu-se relaţia de ordine $\leqslant$ pe $\mathbf{R}$).



a) minim relativ b) maxim relativ c) extreme relative

Fig. IV.11

2) Trebuie remarcat că o funcție poate să aibă mai multe puncte de maxim și minim relativ, iar un minim să fie mai mare decît un maxim, ceea ce justifică adjectivul „relativ" (fig. IV.11, *c*). Valorile $\sup_{x\in A} f(x)$, $\inf_{x\in A} f(x)$ calculate în $\mathbf{R}$ se mai numesc *extremele globale* ale lui f pe A.

Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem *local*, deoarece inegalitățile de tipul (36) sînt verificate nu neapărat pe întreg domeniul de definiție al funcției f ci numai în jurul lui x_0.

În cele ce urmează vom renunța la utilizarea adjectivului „relativ".

3) Dacă marginea $M = \sup_{x\in A} f(x)$ este atinsă, atunci orice punct x astfel încît $f(x_0) = M$ va fi un punct de maxim (nu neapărat strict). Se poate întîmpla ca x_0 să fie un punct de maxim și totuși $f(x_0) < M$ (fig. IV.12, *b*). O situație analoagă (cu sensul inegalității schimbat) are loc pentru marginea inferioară și pentru punctele de minim.

Dacă marginea superioară $\sup_{x\in A} f(x)$ nu este atinsă pe mulțimea A, atunci se poate ca funcția să nu aibă puncte de maxim (fig. IV.13). Similar pentru $\inf_{x\in A} f(x)$.

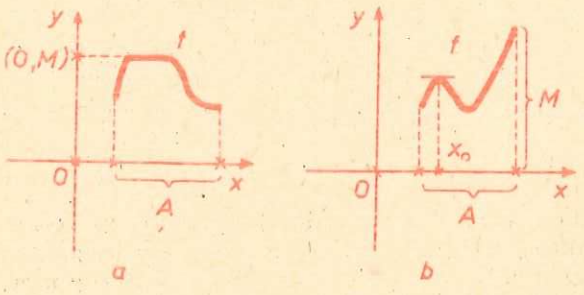


Fig. IV.12

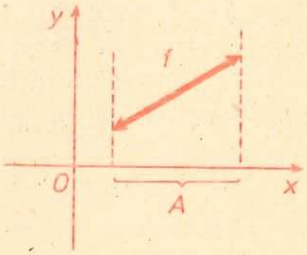


Fig. IV.13

Exemple

1) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, punctul $x_0 = 0$ este punct de minim, deoarece $f(x) \geqslant f(x_0)$, adică $|x| \geqslant 0$ în orice vecinătate a originii.

2) Pentru funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sigma(x) \cdot \sin x$, punctele $x_0 \leqslant 0$, $x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ sînt puncte de minim, iar punctele $x_0 \leqslant 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$ sînt puncte de maxim.

Utilitatea derivatelor apare în mod evident în următorul rezultat:

TEOREMA IV. 7 *(teorema lui P. Fermat, 1601—1665).* **Fie I un interval deschis și $x_0 \in I$ un punct de extrem (relativ) al unei funcții $f : I \to \mathbf{R}$. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.**

Demonstrația este simplă. Pentru a fixa ideile, să presupunem că x_0 este un punct de maxim (cazul minimului se tratează similar sau se reduce la cazul precedent considerînd funcția $-f$). Atunci există o vecinătate U a lui x_0 (și putem presupune că $U \subset I$) astfel încît

$$f(x) \leqslant f(x_0) \text{ pentru orice } x \in U. \tag{37}$$

Cum f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = f'_d(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ și $f'(x_0) = f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Conform inegalității (37) raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ este $\leqslant 0$ (respectiv $\geqslant 0$) pentru $x \in U$, $x > x_0$ (respectiv pentru $x \in U$, $x < x_0$), deci $f'(x_0) \leqslant 0$, $f'(x_0) \geqslant 0$, de unde $f'(x_0) = 0$.

Observații. 1) Dacă I nu ar fi fost interval deschis, de exemplu $I = [a, b]$ și $x_0 = a$ (sau $x_0 = b$), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că $f(x)$ nu ar fi fost definită pentru $x < a$, respectiv pentru $x > b$ (fig. IV.14).

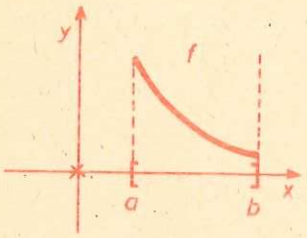


Fig. IV.14

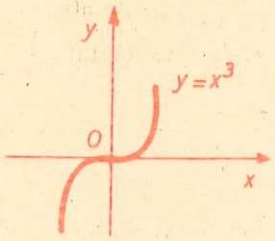


Fig. IV.15

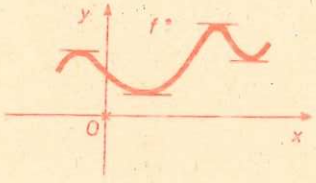


Fig. IV.16

2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă: din faptul că f este derivabilă într-un punct x_0 și $f'(x_0) = 0$ nu rezultă că x_0 este punct de extrem. De exemplu, pentru funcția $f(x) = x^3$ avem $f'(0) = 0$, dar punctul $x_0 = 0$ nu este punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare (fig. IV.15). Se mai spune că teorema lui Fermat dă condiții necesare de extrem, dar nu și suficiente.

Teorema lui Fermat are o interpretare geometrică evidentă: în condițiile enunțului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox (fig. IV.16).

Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval deschis I, atunci zerourile derivatei f' pe I sînt numite și *punctele critice* ale lui f pe I; teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sînt printre punctele critice. În practică, pentru determinarea punctelor de extrem ale unei funcții f derivabile pe un interval deschis sau pe o reuniune de intervale deschise, se rezolvă mai întîi ecuația $f'(x) = 0$. Vom vedea mai tîrziu cum putem decide care din soluțiile acestei ecuații sînt puncte de extrem pentru f.

4.2. Teorema lui Rolle

O funcție $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ se numește funcție Rolle dacă este continuă pe intervalul compact $[a, b]$ și derivabilă pe intervalul deschis (a, b).

Teorema care urmează este o consecință a rezultatelor privind funcțiile continue și a teoremei lui Fermat, foarte utilă în aplicații.

TEOREMA IV.8 *(teorema lui M. Rolle, 1652–1719).* **Fie $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $a<b$ o funcție Rolle astfel încît $f(a)=f(b)$, atunci există cel puțin un punct $c\in(a,b)$ astfel încît $f'(c)=0$.**

Demonstrație. Funcția f fiind continuă (conform teoremei III.5) este mărginită și își atinge marginile în $[a,b]$. Fie $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Apar trei cazuri:

I. $M>f(a)$. Există un punct $c\in[a,b]$ astfel încît $M=f(c)$ (M fiind atinsă) și, evident, $c\neq a$, $c\neq b$ (dacă $c=a$ sau b, atunci $M=f(c)$ ar fi egal cu $f(a)=f(b)$, absurd); așadar, $c\in(a,b)$ și cum c este maxim local, atunci conform teoremei lui Fermat, $f'(c)=0$.

II. $m<f(a)$. Se raționează similar.

III. $m=M$. Atunci funcția f este constantă pe $[a,b]$, deci $f'(c)=0$ pentru orice $c\in(a,b)$.

COROLAR. Între două zerouri ale unei funcții derivabile pe un interval se află cel puțin un zerou al derivatei.

Demonstrație. Fie $f:I\to\mathbf{R}$ derivabilă pe un interval I și $a,b\in I$, $a<b$, zerouri ale lui f. Atunci $f(a)=0=f(b)$ și putem aplica teorema lui Rolle pe intervalul $[a,b]$.

Teorema lui Rolle admite o interpretare geometrică evidentă: dacă segmentul determinat de punctele $(a,f(a))$, $(b,f(b))$ este paralel cu axa Ox, atunci există cel puțin un punct între a și b în care tangenta la graficul lui f este paralelă cu axa Ox (fig. IV.17).

Observații. Toate condițiile din enunțul teoremei lui Rolle sînt necesare, în sensul că dacă s-ar renunța la vreuna din ele, atunci concluzia nu ar mai fi întotdeauna adevărată:

a) Dacă f ar fi continuă numai pe intervalul deschis (a,b), exemplul funcției $f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in(0,1] \\ 1, & \text{dacă } x=0 \end{cases}$ arată că f' nu se anulează pe intervalul $(0,1)$ deși $f(0)=f(1)$ (fig. IV.18)

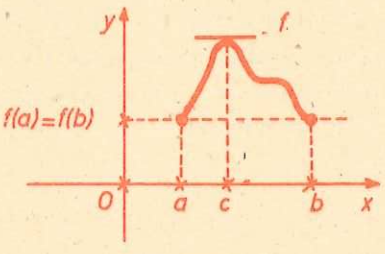


Fig. IV.17

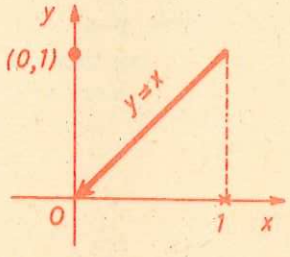


Fig. IV.18

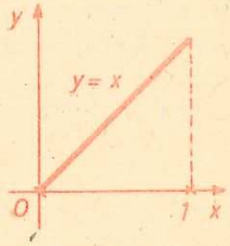


Fig. IV.19

b) Dacă $f(a)\neq f(b)$, este suficient să considerăm funcția $f(x)=x$ pe $[0,1]$ (fig. IV.19).

c) Dacă f nu ar fi derivabilă pe întreg intervalul (a,b), concluzia teoremei ar fi falsă, așa cum arată exemplul funcției $f(x)=|x|$ pe intervalul $[-1,1]$.

TEOREMA IV. 9 *(teorema lui J. Lagrange, 1736—1813,* **a creşterilor finite). Fie** f **o funcţie Rolle pe un interval compact** $[a, b]$. **Atunci există** $c \in (a, b)$ **astfel încît**

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{38}$$

Demonstraţie. Vom considera funcţia auxiliară $F(x) = f(x) + kx$, $x \in [a, b]$, cu k o constantă reală, pe care o vom determina din condiţia $F(a) = F(b)$. Aşadar, $f(a) + ka = f(b) + kb$, deci $k = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$. Pentru acest k, funcţia F verifică condiţiile teoremei lui Rolle şi, ca atare, există un punct $c \in (a, b)$ în care $F'(c) = 0$. Pe de altă parte, $F'(x) = f'(x) + k$, $\forall\, x \in (a, b)$, deci $f'(c) + k = 0$, $f'(c) + \frac{f(b) - f(a)}{a - b} = 0$ şi se obţine relaţia (38).

Observaţii. 1) Relaţia (38) se mai numeşte formula creşterilor finite (sau formula de medie pentru derivabilitate). Notînd $\theta = \frac{c - a}{b - a}$, rezultă $0 < \theta < 1$ şi $c = a + \theta(b - a)$ şi formula (38) se mai scrie: $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(a + \theta(b - a))$, cu $0 < \theta < 1$.

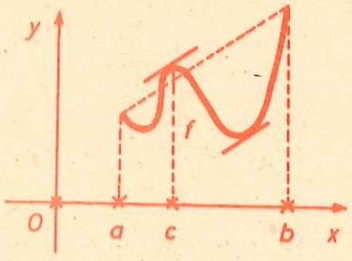


Fig. IV.20

2) Ca şi în cazul teoremei lui Rolle, punctul c nu este unic. Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange rezultă din interpretarea geometrică a derivatei şi este următoarea: există cel puţin un punct $c \in (a, b)$ pentru care tangenta la graficul lui f în $(c, f(c))$ este paralelă cu „coarda" determinată de punctele $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ (fig. IV.20).

3) Putem aplica teorema lui Lagrange restricţiei lui f la orice subinterval $[a, x] \subset [a, b]$, unde $a < x \leqslant b$. Atunci $f(x) - f(a) = (x - a)\, f'(c)$ cu $c \in (a, x)$ nu neapărat unic, depinzînd de x; uneori se scrie $c = c_x$ şi, ca atare, $f(x) - f(a) = (x - a) \cdot f'(c_x)$. Este important de remarcat că dacă $x \to a$, atunci $c_x \to a$.

Iată acum un corolar al teoremei lui Lagrange, care este util în a decide derivabilitatea unei funcţii într-un punct.

COROLAR. Fie f **o funcţie definită într-o vecinătate** V **a punctului** x_0, **derivabilă pe** $V \setminus \{x_0\}$ **şi continuă în** x_0. **Dacă există limita** $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, **atunci** $f'(x_0)$ **există şi** $f'(x_0) = \lambda$. **Dacă limita** λ **este finită, atunci** f **este derivabilă în** x_0.

Demonstraţie. Aplicînd teorema lui Lagrange funcţiei f pe un interval $[x, x_0] \subset V$, $x < x_0$, rezultă $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$ cu $x < c_x < x_0$, deci $f'_s(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(c_x) = \lambda$ (căci $c_x \to x_0$, dacă $x \to x_0$, $x < x_0$). În mod similar, $f'_d(x_0)$ există şi este egală cu λ, deci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = \lambda$.

Exemple

4) Studiem continuitatea și derivabilitatea funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \ln x + x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Pe intervalele $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ funcția f este evident continuă, chiar derivabilă. Apoi $f(1-0) = f(1+0) = f(1)$, deci f este continuă în $x = 1$. Apoi pentru orice $x \neq 1$ avem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ dacă } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}, \text{ deci } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 2x = 2 \text{ și } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(\frac{1}{x} + 1\right) = 2.$$

Aplicînd corolarul anterior, rezultă că f este derivabilă în $x = 1$ și $f'(1) = 2$.

2) Exemplul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x + 1, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ arată de ce este esențial să cerem în corolar ca f să fie continuă. În acest caz $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = 1$ și totuși f nu este derivabilă (căci $f'_s(0) = 1$, $f'_d(0) = \infty$).

Observații

1) Demonstrația corolarului arată ceva mai mult. Dacă f este continuă la stînga în $x = x_0$ și $\lambda = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f'(x)$ există, atunci există $f'_s(x_0)$ și este egală cu λ (și, un rezultat similar, „la dreapta").

Iată două exemple care ilustrează această situație:

a) Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$. În acest caz,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \text{ dacă } x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ și } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & , \text{ dacă } x > 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Deci $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\right) = -\infty$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = +\infty$.

Atunci, conform celor spuse anterior, rezultă că $f'_s(0) = -\infty$, $f'_d(0) = \infty$, deci $x = 0$ este punct de întoarcere pentru graficul lui f.

b) Fie $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ 3^{-x} & , \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$, deci $g'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ -3^{-x} \ln 3, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$

Așadar, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x) = -\ln 3$ și, conform observației anterioare, $g'_s(0) = 0$, $g'_d(0) = -\ln 3$ și punctul $x = 0$ este punct unghiular pentru graficul lui g.

2) Corolarul ne oferă o condiție suficientă ca f să fie derivabilă în x_0 (anume f să fie continuă în x_0 și să existe în $\mathbf{R}$ limita $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$), dar această condiție nu este și necesară.

Astfel, funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0 \end{cases}$ este derivabilă în origine, dar $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ nu există.

Trecem acum la demonstrarea unei alte proprietăți fundamentale legate de derivabilitate. Fie două funcții $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ verificînd condițiile teoremei lui Lagrange și presupunem că $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$. Ne interesează raportul $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. Aplicînd separat funcțiilor f și g teorema lui Lagrange, rezultă că există puncte c, c' din (a, b) astfel încît $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{(b - a)f'(c)}{(b - a)g'(c')} = \frac{f'(c)}{g'(c')}$. Nu există nici un motiv să considerăm aici că avem $c = c'$; totuși se poate demonstra

TEOREMA IV. 10 *(teorema lui Cauchy).* **Fie f, g două funcții Rolle pe intervalul compact $[a, b]$, $a < b$, astfel încît $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a, b)$; atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît**

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{39}$$

Demonstrație. Condiția $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$ implică faptul că $g(a) \neq g(b)$; într-adevăr, dacă $g(a) = g(b)$, aplicînd teorema lui Rolle, ar rezulta că există $c \in (a, b)$ astfel ca $g'(c) = 0$, ceea ce contravine ipotezei.

Considerăm funcția ajutătoare $F(x) = f(x) + kg(x)$, $k \in \mathbf{R}$ și determinăm constanta k astfel ca $F(a) = F(b)$, deci $k = \frac{f(b) - f(a)}{g(a) - g(b)}$. Aplicînd teorema lui Rolle funcției F cu k astfel determinat, există $c \in (a, b)$ astfel încît $F'(c) = 0$. Dar $F'(x) = f'(x) + kg'(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$, deci $f'(c) + kg'(c) = 0$, $-k = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, de unde se obține relația (39).

Observație. Am fi putut demonstra mai întîi teorema lui Cauchy și apoi, particularizînd $g(x) = x$, să obținem teorema lui Lagrange.

Ne putem întreba cum arată funcțiile care apar ca derivate ale unor funcții derivabile (pe un interval). În clasa a XII-a se va studia în mod sistematic următoarea problemă: dîndu-se o funcție f, este ea derivata unei alte funcții? Cu alte cuvinte, există F derivabilă astfel încît $F' = f$? Dacă o astfel de funcție F există, ea se numește primitivă a lui f. De exemplu, funcția $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n + 1}$ (n întreg, $n \geqslant 0$) este o primitivă pe $\mathbf{R}$ a funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$; funcția $F(x) = -\frac{\cos \omega x}{\omega}$, $\omega \neq 0$ este o primitivă pe $\mathbf{R}$ a lui $f(x) = \sin \omega x$, iar $F(x) = \frac{\sin \omega x}{\omega}$ pentru $f(x) = \cos \omega x$ etc.

În cele ce urmează, vom indica o proprietate importantă a funcțiilor care admit primitive, deci care sînt derivate ale altor funcții.

TEOREMA IV.11 *(teorema lui Darboux). Dacă $f : I \to \mathbf{R}$ este o funcție derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux (adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).*

Demonstrație. Fie $a < b$ două puncte din I astfel încît $f'(a) \neq f'(b)$. Pentru a fixa ideile, să presupunem că $f'(a) < f'(b)$. Fie $\lambda \in (f'(a), f'(b))$. Trebuie arătat că există un punct $c \in (a, b)$ astfel încît $f'(c) = \lambda$. Pentru aceasta vom considera funcția auxiliară $F(x) = f(x) - \lambda x$; evident, $F'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ și $F'(b) = f'(b) - \lambda > 0$.

Funcția F este derivabilă, deci continuă în intervalul $[a, b]$ și, ca atare, marginea inferioară $m = \inf_{x \in [a, b]} F(x)$ este atinsă într-un punct $c \in [a, b]$. Vom arăta că de fapt m nu poate fi atinsă nici în a, nici în b. Așadar, $c \in (a, b)$ și din teorema lui Fermat se obține atunci $F'(c) = 0$. Dar aceasta arată că $f'(c) - \lambda = 0$, adică $f'(c) = \lambda$, tocmai ceea ce trebuia probat.

Pentru a arăta că punctul c aparține intervalului (a, b), vom proceda astfel: alegem $\varepsilon > 0$ astfel încît $|F'(a)| > \varepsilon$ și $F'(b) > \varepsilon$. Din definiția derivabilității lui F în punctele a și b, există $\delta > 0$ depinzînd de ε astfel încît din faptul că $|x - a| < \delta$ (respectiv $|x - b| < \delta$) să rezulte că

$$F'(a) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(a)}{x - a} < F'(a) + \varepsilon$$

$$\left[\text{respectiv } F'(b) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(b)}{x - b} < F'(b) + \varepsilon\right].$$

Deoarece $F'(a) + \varepsilon < 0$, raportul $\dfrac{F(x) - F(a)}{x - a}$ va fi strict negativ, pentru orice $x > a$, $x - a < \delta$. Deci $F(x) - F(a) < 0$, adică $F(x) < F(a)$. În mod analog, din inegalitatea $F'(b) - \varepsilon > 0$, rezultă că $F(x) < F(b)$ pentru $x < b$, $x - b < \delta$. Aceste inegalități arată că marginea inferioară a funcției F nu este atinsă nici în a, nici în b.

COROLAR. *Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.*

Într-adevăr, dacă f' nu ar avea semn constant pe I, atunci f' ar lua valori pozitive și valori negative pe I, deci, conform teoremei IV.11, ar lua și valoarea zero, ceea ce contravine ipotezei că f' nu se anulează pe I.

Exemple

1) Funcțiile σ, sgn pe $\mathbf{R}$ nu admit primitive (căci dacă ar avea primitive, ele ar fi funcții derivate și, conform teoremei IV.11, ar avea proprietatea lui Darboux).

2) Iată un exemplu de funcție derivată care nu este continuă: luăm $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

Această funcție este derivabilă pe $\mathbf{R}$ și $g'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, dacă $x \neq 0$ și $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Funcția $f = g'$, adică $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \tag{40}$$

este o derivată și nu este continuă (în punctul 0). În particular, funcția f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbf{R}$, fără a fi continuă.

3) Arătăm că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ nu admite primitivă. Este suficient să arătăm că f nu are proprietatea lui Darboux, dar se poate raționa și direct: dacă $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ar fi o primitivă a lui f, atunci am avea $f(0) = F'(0) = F'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{(x - 0) \cdot F'(c_x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(c_x) = \infty$, ceea ce este absurd.

EXERCIȚII (capitolul IV, § 4)

1. Aplicînd definiția IV.4, să se determine extremele funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = x^2 + x$;
b) $f(x) = 1 - |x|$;
c) $f(x) = A \sin 2x$ ($A \neq 0$ constant);
d) $f(x) = |x^2 - 4|$;
e) $f(x) = -x^2 + 4x + 7$;
f) $f(x) = x^2 \cdot |x - 1|$.

2. Să se determine punctele critice pentru funcțiile $f : D \to \mathbf{R}$ următoare, D fiind mulțimea punctelor $x \in \mathbf{R}$ unde f este derivabilă:

a) $f(x) = x^3 - 3x$;
b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 7$;
c) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$;
d) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
e) $f(x) = e^{x^2 - 2x}$;
f) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3*. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(\lambda) = \dfrac{A}{\lambda_0^5 \left(e^{\frac{1}{\lambda}} - 1\right)}$ (funcția de radiație a lui Planck, $A > 0$ fiind o constantă reală).

a) Să se arate că $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda > 0}} f'(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f'(\lambda) = 0$;

b) Să se arate că f are un singur punct critic pe intervalul $(0, \infty)$.

4. Să se arate că funcția $f : \left[-1, \dfrac{7}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = |3x - 2| - 5$ verifică $f(-1) = f\left(\dfrac{7}{3}\right)$ și totuși f' nu se anulează pe intervalul $\left[-1, \dfrac{7}{3}\right]$. Care este explicația?

5. a) Să se arate că derivatele funcțiilor $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$; $g(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ au numai rădăcini reale.

b) Fie $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială neconstantă. Să se arate că între orice două rădăcini reale consecutive ale lui P' există cel mult o rădăcină reală a lui P.

6. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ zerouri ale lui f. Să se arate că f' are cel puțin $n - 1$ zerouri. Aplicînd acest rezultat, să se arate că o funcție polinomială de grad n are cel mult n zerouri distincte.

7. Fie funcția $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (0, 1] \end{cases}$. Să se arate că f este derivabilă, $f(-1) = f(1) = 0$ și f' nu se anulează. Se contravine corolarului teoremei lui Rolle?

8. Fie $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială. Să se arate că:

a) dacă toate rădăcinile lui P sînt reale și distincte, atunci P' are aceeași proprietate;

b) dacă toate rădăcinile lui P sînt reale, atunci P' are toate rădăcinile reale.

9. Să se arate că există $c \in (1, 2)$ astfel încît pentru funcția $f: [1, 2] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \ln x$ să avem $f(2) - f(1) = f'(c)$ și să se determine efectiv valoarea lui c.

10. Folosind corolarul teoremei lui Lagrange, să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor f următoare în punctele x_0 indicate:

a) $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ dacă } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ 6x - 1, \text{ dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$, $x_0 = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$;

b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ dacă } x \leqslant 1 \\ \ln x, \text{ dacă } x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

c) $f: [-2, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2}$, $x_0 = -2$ și $x_0 = 0$;

d) $f: [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$, $x_0 = 1$.

11. Să se aplice teorema lui Cauchy pentru funcțiile $f, g: [1, e] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2x - 1$, determinînd punctul c corespunzător. Similar, pentru funcțiile f, $g: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

12. Să se arate că dacă m, M sînt valorile extreme ale funcției $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \mathbf{R}, a < 0)$, atunci $m \cdot M = b^2 + \frac{4}{27} a^3$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL IV

1. *Să se calculeze derivatele laterale ale funcțiilor* $f, g, h: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *următoare, în punctele indicate:*

a) $f(x) = x + x \mid x \mid$, $x_0 = 0$;

b) $g(x) = x\sigma(x)$, $x_0 = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leqslant 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Soluție. a) $f'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x - x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (1 - x) = 1$;

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 + x) = 1.$$

b) $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ x, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; avem $g'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{0}{x} = 0$ și

$$g'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

c) $h'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = 0$ și

$h'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{h(x)-h(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2+1+1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{x^2+2}{x-1} = \infty.$

2. *Să se calculeze, pornind de la definiție:*

a) $f'(1)$ *pentru* $f:[-3,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = x\sqrt{x+3}$;

b) $g'(-\pi)$ *pentru* $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x) = x\sin x$.

Soluție. a) $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{x+3}-2}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x+3)-4}{(x-1)(x\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)+(3x^2-3)}{(x-1)(x\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+4x+4}{x\sqrt{x+3}+2} = \frac{9}{4}.$$

b) $g'(-\pi) = \lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{g(x)-g(-\pi)}{x+\pi} = \lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{x\sin x}{x+\pi} = \lim\limits_{x\to -\pi} \dfrac{-x\sin(x+\pi)}{x+\pi} =$

$$= \lim_{x\to -\pi} (-x)\cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \pi.$$

3. *Să se arate că dreapta* $y = 7x-2$ *este tangentă la curba* $y = x^3+4x$.

Soluție. Fie $f(x) = x^3+4x$, $x\in\mathbf{R}$. Pentru orice punct x_0 ecuația tangentei la graficul lui f în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$, adică $y - x_0^3 - 4x_0 = (3x_0^2+4)(x-x_0)$, deci $y = (3x_0^2+4)x - 2x_0^3$. Se observă că această dreaptă coincide cu dreapta dată pentru $x_0 = 1$.

4. *Să se determine punctele critice ale funcțiilor* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *următoare:*

a) $f(x) = \ln(x^2+2)(x^2+3)$; b) $f(x) = \sin^{50} 2x$;

c) $f(x) = e^{2x} + e^{-3x}$; d) $f(x) = \dfrac{x^3}{|x|+1}$.

Soluție. a) Avem $f'(x) = \dfrac{4x^3+10x}{(x^2+2)(x^2+3)}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x = 0$.

b) Notăm $u = \sin 2x$, deci $f(x) = u^{50}$, $f'(x) = 50\cdot u^{49}\cdot u' = 50\cdot\sin^{49}2x\cdot(2\cos 2x) = 100\cdot\sin^{49}2x\cdot\cos 2x$. Punctele critice sînt soluțiile ecuațiilor $\sin 2x = 0$, $\cos 2x = 0$, deci $\dfrac{k\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

c) $f'(x) = 2e^{2x} - 3e^{-3x}$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ se scrie $2e^{2x} = 3e^{-3x}$, $e^{5x} = \dfrac{3}{2}$ și are unica soluție $x = \dfrac{1}{5}(\ln 3 - \ln 2)$.

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{-x+1}, & \text{dacă } x\leqslant 0 \\ \dfrac{x^3}{x+1}, & \text{dacă } x>0 \end{cases}$

Funcţia f este derivabilă în punctul $x = 0$ căci, $f'_s(0) = f'_d(0) = 0$.

$$\text{Atunci, } f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}, & \text{dacă } x < 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \\ \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Funcţia are un singur punct critic, anume $x = 0$.

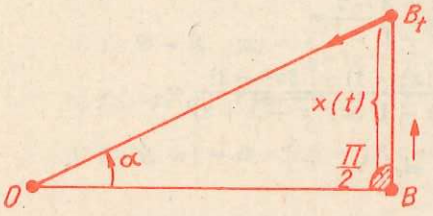


Fig. IV.21

5. *Un balon* B *(punctual) se înalţă vertical dintr-un loc aflat la* 20 m *de un observator* O *(punctual), avînd viteza* 30 m/minut. *Care este viteza de variaţie a unghiului* α *în momentul cînd balonul va fi la o înălţime de* 200 m? (fig. IV.21).

Soluţie. Notăm cu B_t poziţia balonului şi cu $x(t)$ înălţimea la care se află balonul, la momentul t. Avem $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{20}$, deci $\alpha(t) = \operatorname{arctg}\dfrac{x(t)}{20}$, $\alpha'(t) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{x^2(t)}{400}} \cdot \dfrac{x'(t)}{20} = \dfrac{20 \cdot x'(t)}{400 + x^2(t)}$. Viteza cerută în enunţ este

$$\frac{20 \cdot 30}{400 + 200^2} = \frac{600}{101 \cdot 400} = \frac{3}{202} \text{ radiani/minut.}$$

6. *Fie* $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. *Să se determine* $J = f(I)$ *şi să se arate că* $f : I \to J$ *este bijectivă. Fie* g *inversa lui* f; *să se calculeze* $g'(2)$ *şi* $g''(2)$.

Soluţie. Funcţia f este injectivă pe I pentru că este strict crescătoare pe I. E clar că $J = (-2, \infty)$, $f : I \to J$ este bijectivă şi avem $f(2) = 2$. Atunci, aplicînd formula (26), găsim: $g'(2) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{9}$.

Relaţia $f(x) = x^3 - 3x$ arată că $g^3(y) - 3g(y) = y$, $\forall\, y \in J$, deci, derivînd: $3g^2(y)g'(y) - 3g'(y) = 1$, $6g(y)g'^2(y) + 3g^2(y) \cdot g''(y) - 3g''(y) = 0$ în fiecare punct y din J şi înlocuind $y = 2$, rezultă: $6 \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{81} + 3 \cdot 4 \cdot g''(2) - 3g''(2) = 0$, de unde $g''(2) = -\dfrac{4}{243}$.

7. *Se consideră funcţia* $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Aplicînd lui f *teorema lui Rolle pe fiecare interval* $\left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right]$, $n \geqslant 1$ *întreg, să se arate că ecuaţia* $\operatorname{tg} x = x$ *are soluţii pe fiecare interval* $(n\pi, (n+1)\pi)$.

Soluție. Avem $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\sin \pi(n+1) = 0$ și $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, deci există $\xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ astfel încît $f'(\xi_n) = 0$. Dar $f'(x) = \sin\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}$, $x \neq 0$, deci $\sin\frac{\pi}{\xi_n} - \frac{\pi}{\xi_n}\cos\frac{\pi}{\xi_n} = 0$, adică $\operatorname{tg}\frac{\pi}{\xi_n} = \frac{\pi}{\xi_n}$ și, ca atare, $\frac{\pi}{\xi_n}$ este soluție a ecuației $\operatorname{tg} x = x$. Cum $\xi_n \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, avem $\frac{\pi}{\xi_n} \in (n\pi, (n+1)\pi)$, $\forall\, n \geqslant 1$.

8. *Se consideră funcția* $f : [0, 10] \to \mathbf{R}$, *definită prin* $f(x) = x \sin x$. *Să se arate că* $|f(x) - f(y)| \leqslant 11 \cdot |x - y|$, $\forall\, x, y \in [0, 10]$. *Generalizare.*

Soluție. Dacă $x = y$ relația este evidentă. Dacă $x \neq y$ aplicăm formula lui Lagrange a creșterilor finite, pe intervalul închis de capete x, y și există ξ între x și y astfel încît $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, deci $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y|$. Dar $f'(\xi) = \xi\cos\xi + \sin\xi$, deci $|f'(\xi)| = |\xi\cos\xi + \sin\xi| \leqslant |\xi| + 1 \leqslant 11$.

Generalizarea este evidentă: dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $a < b$ este o funcție derivabilă și dacă există $M > 0$ astfel încît $|f'(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci $|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$, $\forall\, x, y \in [a, b]$.

9. *Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcțiilor următoare:*

a) $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$;

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{dacă } x = \frac{1}{n} \text{ și } n \geqslant 1 \text{ este întreg} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

Soluție. a) Dacă $x \geqslant 1$, atunci $f^2(x) = x + 2\sqrt{x-1} + x - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-2)^2}$, deci $f(x) = \sqrt{2x + 2\,|x-2|}$, adică

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & \text{dacă } x \geqslant 2 \\ 2, & \text{dacă } 1 \leqslant x < 2 \end{cases}$$

Pe intervalele deschise $(1, 2)$, $(2, \infty)$ funcția f este elementară, deci este continuă și derivabilă. În punctul $x = 1$, avem $f(1 + 0) = f(1)$, deci f este continuă, iar în punctul $x = 2$, avem $f(2 - 0) = f(2 + 0) = f(2) = 2$ și, din nou, f este continuă. Apoi $\forall\, x \in (1, 2) \cup (2; \infty)$,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & \text{dacă } x > 2 \\ 0, & \text{dacă } 1 < x < 2 \end{cases}$$

și, aplicînd corolarul teoremei IV.9, avem $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1,\ x > 1} f'(x) = 0$; apoi $f'_s(2) = \lim\limits_{x \to 2,\ x < 2} f'(x) = 0$, $f'_d(2) = \lim\limits_{x \to 2,\ x > 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1$, deci funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 2$. Așadar, funcția f este continuă în $[1, \infty)$ și derivabilă în $[1, \infty) \setminus \{2\}$.

b) Considerăm funcția $u : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ (pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem într-adevăr $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 \leqslant 1$); știm că $\arcsin [-1, 1] \to \mathbf{R}$ este continuă și atunci funcția

compusă $f = \arcsin u$ va fi continuă pe $\mathbf{R}$. Funcţia $f = \arcsin u$ este derivabilă în punctele unde $u^2 < 1$, adică $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 < 1$, $(1-x^2)^2 > 0$, adică $x \neq \pm 1$; în aceste puncte avem

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|1-x^2|} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } 1-x^2 > 0 \\ -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } 1-x^2 < 0 \end{cases},$$

deci

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \dfrac{2}{1+x^2}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Atunci $f'_s(-1) = \lim\limits_{x \to -1,\ x<-1} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1,\ x<-1} \left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -1$; $f'_d(-1) = \lim\limits_{x \to -1,\ x>-1} f'(x) = 1$; $f'_s(1) = 1$; $f'_d(1) = -1$. Aşadar, f este continuă pe $\mathbf{R}$ şi este derivabilă în $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Punctele $+1$, -1 sînt puncte unghiulare.

c) Pe mulţimea $A = \mathbf{R} \setminus \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, care este reuniune de intervale deschise, funcţia este nulă şi, ca atare, continuă şi derivabilă. În punctele $x = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ întreg funcţia f este discontinuă deoarece limitele laterale sînt nule, iar valoarea funcţiei este $\frac{1}{n}$. Atunci f va fi nederivabilă în aceste puncte. Rămîne să studiem continuitatea şi derivabilitatea lui f în punctul $x = 0$. Aşadar, $f(0) = 0$ şi pentru orice şir $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ avem $f(x_n) \to 0$, deci f este continuă în punctul $x = 0$. Apoi $f'_s(0) = \lim\limits_{x \to 0,\ x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0,\ x<0} \frac{0-0}{x} = 0$. Arătăm, în fine, că $f'_d(0)$ nu există; într-adevăr, dacă $x_n \to 0$, $x_n > 0$ este un şir de numere iraţionale, atunci $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{0-0}{x_n} \to 0$ şi pentru şirul $x_n = \frac{1}{n}$ avem $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0} = \frac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}-0} = 1 \to 1$. În concluzie, funcţia f este continuă pe mulţimea $A \cup \{0\}$ şi derivabilă pe A.

10. *Se consideră un interval I. Pentru orice întreg $n \geqslant 1$ se notează cu C_I^n mulţimea funcţiilor $f : I \to \mathbf{R}$ care sînt de n ori derivabile pe I cu $f^{(n)}$ continuă pe I (numite funcţii de clasă C^n pe I). Se notează, de asemenea, cu C_I^0 mulţimea funcţiilor continue şi cu C_I^∞ mulţimea funcţiilor indefinit derivabile pe I. Să se arate că:*

a) *au loc incluziunile stricte $C_I^\infty \subset C_I^{n+1} \subset C_I^n \subset C_I^0$, pentru orice $n \geqslant 1$;*

b) *aplicaţia de derivare $D : C_I^1 \to C_I^0$, $D(f) = f'$ nu este injectivă.*

Soluţie. a) Incluziunile sînt evidente. Pentru a arăta că ele sînt, în general, stricte, fie $I = R$; pentru orice întreg $n \geqslant 1$ considerăm funcţia $h_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $h_n(x) = x^n \cdot \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ x^n, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Se verifică imediat că $h_n \in C_I^{n-1}$, dar $h_n \notin C_I^n$ pentru orice $n \geqslant 1$. Astfel $h_1 \in C_I^0 \setminus C_I^1$, $h_2 \in C_I^1 \setminus C_I^2$.

b) Considerăm funcţia $h_2 \in C_I^1$ şi funcţia constantă $g : I \to \mathbf{R}$, $g(x) = 1$. Avem, evident, $(h_2 + g)' = h_2$, adică $D(h_2 + g) = D(h_2)$. Dacă aplicaţia D ar fi injectivă, ar rezulta $h_2 + g = h_2$, adică $g = 0$, absurd.

Notă. În clasa a XII-a se va demonstra că aplicaţia D este surjectivă (adică pentru orice funcţie continuă $f : I \to \mathbf{R}$ există o primitivă, deci o funcţie $F : I \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încît $F' = f$).

11. *Fie* $a_1 > 0$, $a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ şi $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geqslant n$ *pentru orice* $x \in \mathbf{R}$. *Să se arate că* $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

Soluţie. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$. Evident, $f(0) = n$ şi, conform ipotezei, $f(x) \geqslant f(0)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Aşadar, punctul $x = 0$ este punct de minim pentru f. Conform teoremei lui Fermat, avem $f'(0) = 0$. Dar $f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \ldots + a_n^x \ln a_n = 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ şi $f'(0) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n$. Relaţia $f'(0) = 0$ devine atunci $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$.

12. *Se consideră* $2n$ *numere reale* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. *Să se arate că ecuaţia* $\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ *admite cel puţin o soluţie în intervalul* $(0, 2\pi)$.

Soluţie. Dacă notăm cu $g(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ şi considerăm funcţia $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$, constatăm că $f'(x) = g(x)$. Deoarece $f(0) = f(2\pi)$, putem aplica teorema lui Rolle şi, ca atare, există $c \in (0, 2\pi)$ astfel încît $f'(c) = 0 = g(c)$ şi c va fi soluţie a ecuaţiei din enunţ.

13. Fie $f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^2 x^2}$ $(n \geqslant 0)$. Să se calculeze $\forall\, x \in [-1, 1]$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şi $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ şi să se arate că $f' \neq g$.

Soluţie. Evident, $\forall\, x \in [-1, 1]$, $f(x) = 0$ şi $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$, deci $g(x) = 0$, dacă $x \neq 0$ şi $g(0) = 1$. Aşadar, $f'(0) \neq g(0)$. (Acest exerciţiu arată că $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

14. Fie $I = [0, 1]$. Se consideră funcţiile $u, v : I \to \mathbf{R}$, $u(x) = \inf\limits_{y\in I} (x - y)^2$, $v(x) = \sup\limits_{y\in I} (x - y)^2$. Să se studieze derivabilitatea lui u, v şi să se calculeze $\sup\limits_{x\in I} u(x)$, $\inf\limits_{x\in I} v(x)$.

Soluţie. $\forall\, x \in I$, $u(x) = 0$ şi $v(x) = \begin{cases} (1 - x)^2, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ x^2 \quad , \text{ dacă } \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$. Funcţia u este derivabilă şi $\sup\limits_{x\in I} u(x) = 0$, iar v nu este derivabilă şi $\inf\limits_{x\in I} v(x) = \dfrac{1}{4}$. (Acest exerciţiu arată că $\sup\limits_{x\in I} \inf\limits_{y\in I} f(x, y) \neq \inf\limits_{x\in I} \sup\limits_{y\in I} f(x, y)$, adică „sup" şi „inf" nu comută între ele.)

Capitolul V

APLICAȚII ALE DERIVATELOR ÎN STUDIUL VARIAȚIEI FUNCȚIILOR

Denumirea capitolului ne scutește de alte lămuriri asupra conținutului său. În esență, vom urmări sistematic modul cum rezultatele obținute pînă în prezent ne permit să studiem o serie de probleme a căror formulare era pe înțelesul vostru, dar a căror rezolvare nu era întotdeauna posibilă cu metode elementare.

§ 1. Rolul primei derivate în studiul funcțiilor

a) Remarcăm mai întîi un rezultat simplu, dar foarte important.

TEOREMA V.1. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție monoton crescătoare (respectiv descrescătoare) pe un interval I. Dacă f este derivabilă pe I, atunci $f' \geqslant 0$ pe I (respectiv $f' \leqslant 0$ pe I).

Demonstrație. Presupunem f monoton crescătoare. Atunci, pentru orice $x, x_0 \in I$ $(x \neq x_0)$ avem $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ și, trecînd la limită, rezultă $f'(x_0) \geqslant 0$. Se raționează similar dacă f este descrescătoare (sau se consideră funcția crescătoare $-f$).

1.1. Consecințe ale teoremei lui Lagrange

b) *Intervale de monotonie.* Stabilim un criteriu important pentru demonstrarea monotoniei unei funcții derivabile pe un interval, care constituie reciproca teoremei V.1.

TEOREMA V. 2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $f' \geqslant 0$ pe I (adică $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in I$), atunci funcția f este monoton crescătoare pe I, iar dacă $f' \leqslant 0$ pe I, atunci f este monoton descrescătoare pe I.

Demonstrația este imediată, folosind teorema lui Lagrange. Să presupunem că $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ și că $f' \geqslant 0$ *pe* I. Aplicînd funcției f teorema creșterilor finite pe intervalul $[x_1, x_2]$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$ cu $c \in (x_1, x_2)$; așadar, $c \in I$, deci $f'(c) \geqslant 0$. Deoarece $x_2 - x_1 > 0$, rezultă că $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, adică $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, deci f este monoton crescătoare pe I.

Dacă $f' \leqslant 0$ pe I, atunci, raţionînd ca mai sus, deoarece $f'(c) \leqslant 0$, rezultă $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c) \leqslant 0$, deci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

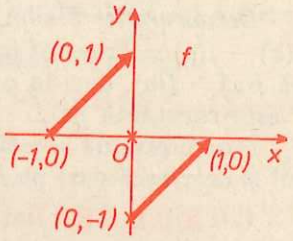


Fig. V.1

Observaţii. 1) Se poate întîmpla ca f să fie strict crescătoare şi f' să se anuleze în unele puncte (de exemplu, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3$). Dacă f este derivabilă pe un interval I şi f' este strict pozitivă (respectiv strict negativă) pe I, atunci f este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe acel interval.

2) Dacă o funcţie f nu este derivabilă pe un întreg interval I (de pildă este derivabilă doar pe $I \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in I$) şi dacă $f' > 0$ pe mulţimea pe care este definită, nu putem conchide că f este monotonă (de pildă nu rezultă neapărat monotonă în vecinătatea lui x_0). Iată un exemplu simplu:

$$f : [-1, 1] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ x - 1, & \text{dacă } x \in [0, 1) \end{cases} \quad \text{(fig. V.1)}$$

Exemple

1) Considerăm funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 12x$ şi studiem monotonia pe $\mathbf{R}$. Avem, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Se observă că pe intervalele $I_1 = (-\infty, -2]$, $I_2 = [2, \infty)$ avem $f' \geqslant 0$, deci f este crescătoare, iar pe intervalul $I_3 = (-2, 2)$ avem $f' < 0$, deci f este descrescătoare. Această discuţie poate fi prezentată într-un tablou, în care pe linia întîi apar domeniul de definiţie al lui f şi punctele unde f' îşi schimbă semnul:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	-16	$\nearrow$	$+\infty$

Pe linia a doua sînt indicate semnele lui f', pe intervalele respective, iar pe ultima linie este simbolizată creşterea ($\nearrow$) sau descreşterea ($\searrow$) lui f.

2) Studiem monotonia funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ pe $\mathbf{R}$. În acest caz, $f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2}(-2x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Tabloul respectiv este:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	0

3) Pentru funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - x - \ln x$ avem $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x}$ şi tabloul corespunzător este:

x	0		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deci f este descrescătoare pe intervalul $(0, 1]$ şi crescătoare pe $[1, \infty)$.

c) ***Funcţii avînd aceeaşi derivată.*** Ştim că derivata unei funcţii constante este funcţia nulă. Demonstrăm reciproca acestei afirmaţii.

TEOREMA V.3. Dacă o funcţie $f : I \to \mathbf{R}$ este derivabilă pe un interval şi $f' = 0$ pe I (adică $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$), atunci f este constantă pe I.

Demonstrație. Fixăm un punct $a \in I$. Pentru orice $x \in I$, $x \neq a$, avem $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c)$ cu c cuprins între a și x. Deoarece $f'(c) = 0$, rezultă că $f(x) = f(a)$, deci în orice punct $x \in I$, f ia valoarea $f(a)$, adică funcția f este constantă pe I.

Putem raționa și astfel: din teorema V.2 rezultă că f este atît crescătoare cît și descrescătoare pe I, deci f este neapărat constantă pe I.

COROLAR. Dacă f și g sînt două funcții derivabile pe un interval I și dacă $f' = g'$ pe I, atunci diferența lor $f - g$ este constantă pe I (se mai spune că funcțiile f și g diferă printr-o constantă).

Demonstrație. Notăm $\varphi = f - g$, deci $\varphi' = f' - g' = 0$ pe I și, aplicînd teorema V.3, rezultă că φ este constantă pe I.

Exemple

1) Considerăm funcția $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x$ pe $\mathbf{R}$. Avem $f'(x) = 2\sin x \cos x + \frac{1}{2}(-2\sin 2x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Așadar, f este constantă pe $\mathbf{R}$. De altfel, $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

2) Funcțiile $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ $(x \neq -1)$ au derivatele egale $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, deci ele diferă printr-o constantă pe fiecare din intervalele $I_1 = (-\infty, -1)$, $I_2 = (-1, \infty)$.

De altfel, $f(x) - g(x) = -\frac{2\pi}{4}$, $\forall x \in I_1$ și $f(x) - g(x) = \frac{\pi}{4}$, $\forall x \in I_2$ (pentru că limitele diferenței $f(x) - g(x)$ spre $-\infty$ și spre $+\infty$ sînt egale, respectiv, cu $-\frac{3\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{4}$).

Observație. Dacă f ar fi definită pe reuniunea a două intervale disjuncte I, J și $f = 0$ pe $I \cup J$, nu am putea conchide că f este constantă pe $I \cup J$. Teorema V.3 afirmă doar că f este constantă pe I și pe J (dar cu valori eventual distincte). De exemplu, funcția $f : (-1, 1)\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \\ 2, & \text{dacă } x \in (0, 1) \end{cases}$$

are derivata nulă în fiecare punct din $A = (-1, 0) \cup (0, 1)$, dar funcția f nu este constantă pe A. (A se vedea și exemplul 2) de mai sus.)

1.2. Regula lui l'Hospital

În capitolul II am dat definiția, proprietățile de bază ale limitelor de funcții și cîteva procedee de calcul efectiv al unor limite de funcții. Aceste procedee necesită o anumită îndemînare și mult exercițiu pentru a fi stăpînite. Folosind derivatele se poate stabili o metodă generală care acoperă multe din situațiile întîlnite și face calculul limitelor mai simplu.

a) Începem cu examinarea cazului $\frac{0}{0}$, mai precis al limitelor de forma $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ unde $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$. În capitolul II am indicat

cîteva situații simple în care, prelucrînd convenabil raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$ și aplicînd teoreme asupra limitelor, putem calcula limita acestuia. Dăm acum

TEOREMA V.4 (regula lui l'Hospital, 1661–1704). Fixăm două funcții reale f, g definite pe un interval $[a, b]$ și un punct $x_0 \in [a, b]$. Presupunem satisfăcute următoarele condiții:

1°. f și g sînt derivabile pe $[a, b] \setminus \{x_0\}$ și continue în x_0,

2°. $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$;

3°. $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0 ($\forall\, x \in V \setminus \{x_0\}$);

4°. există limita $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (în $\overline{\mathbf{R}}$).

În aceste condiții, există $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

Demonstrație. Aplicînd teorema lui Cauchy rezultă că pentru orice $x \in [a, b] \cap V$, $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{cf. } 2°}{=} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, cu $c = c_x$ situat între x_0 și x. Dacă $x \to x_0$, atunci $c_x \to x_0$ și, folosind ipoteza 4°, rezultă că $\frac{f(x)}{g(x)} \to \lambda$ pentru $x \to x_0$.

Trebuie observat că nu este nevoie ca f și g să fie derivabile și în punctul x_0; subliniem, de asemenea, includerea cazului cînd $\lambda = +\infty$ sau $\lambda = -\infty$.

Exemple

1) Calculăm $\lambda = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \sin x + \cos x - 1}{x}$. Luînd $f(x) = 2 \sin x + \cos x - 1$, $g(x) = x$ într-un interval $[-a, a]$, $a > 0$ și $x_0 = 0$, în acest caz, $f'(x) = 2 \cos x - \sin x$, $g'(x) = 1$ și $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \cos x - \sin x}{1} = 2$; deci, conform regulii lui l'Hospital, avem $\lambda = 2$.

2) Regula poate fi scrisă succint astfel: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (cîtul derivatelor și nu derivata cîtului!), în condițiile teoremei V.4. Astfel,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin \pi x}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sin \pi x)'}{(2x - 2)'} = \lim_{x \to 1} \frac{\pi \cos \pi x}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Observații. 1) Se poate întîmpla ca raportul $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ să nu aibă limită și totuși $\frac{f(x)}{g(x)}$ să aibă limită. Iată un exemplu: luăm funcțiile f, g definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \sin x$$

într-o vecinătate a originii. În acest caz, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(x \cdot \sin \frac{1}{x}\right) =$ $= \left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$ și, pe de altă parte, $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ $\left(\text{pentru } x \neq 0,\ g'(x) = \cos x \text{ și } \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \text{ nu are limită în punctul } x = 0\right)$.

2) În cazul cînd f' și g' sînt continue în punctul x_0, avem $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, $\lim_{x\to x_0} g'(x) = g'(x_0)$ și dacă $g'(x_0) \neq 0$, atunci $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. În acest caz, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$. Dacă însă $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, atunci ne găsim într-o situație analoagă celei inițiale, uneori mai favorabilă. Dacă f și g au derivate de ordin superior și derivatele lui g îndeplinesc condițiile teoremei V.4, atunci se poate aplica repetat regula lui l'Hospital cîturilor $\frac{f'}{g'}$, $\frac{f''}{g''}$ etc. Iată un exemplu: fie $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \operatorname{sh} x - x$, $g(x) = x^3$ și presupunem că vrem să calculăm $\lambda = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$. Avem $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{6} = \frac{1}{6} \operatorname{ch} 0 = \frac{1}{6}$.

3) Fie $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Aici $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$. Aplicînd mecanic regula lui l'Hospital găsim $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$, deci $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\cos 0}{1} = 1$. Deși rezultatul este corect, aplicarea regulii este incorectă, pentru că pentru a putea demonstra că $(\sin)'(x) = \cos x$ a fost necesară tocmai limita de mai sus.

4) Aplicarea mecanică (fără a verifica dacă sînt îndeplinite ipotezele necesare) poate conduce la rezultate eronate; nu putem aplica regula lui l'Hospital, de pildă, dacă $f(x) \to 0$ și $g(x) \to 1$, cînd $x \to x_0$. De exemplu, luînd $f(x) = x - 1$, $g(x) = (x + 1)(x + 2)$, $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{6} = 0$ cînd $x \to 1$. Aplicarea (incorectă) a regulii lui l'Hospital ar da: $\frac{1}{2x+3} \to \frac{1}{5}$.

O situație des întîlnită este următoarea. Se cere $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, știind că $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$, fără ca funcțiile f și g să fie ambele definite în punctul x_0.

Are loc analogul teoremei V.4 (pentru limite la stînga) și anume

TEOREMA V.4'. Fie $f, g : [a, x_0] \to \mathbf{R}$. Presupunem satisfăcute următoarele condiții:

1°. f și g derivabile pe (a, x_0);

2°. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$;

3°. $g(x)$ și $g'(x)$ nu se anulează într-o vecinătate V a lui x_0, $(\forall\, x \in V \cap (a, x_0))$;

4°. Există $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ (în $\overline{\mathbf{R}}$).

În aceste condiții, $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ există și este egală cu λ.

Demonstrația este imediată, de îndată ce remarcăm că funcțiile f_1, $g_1 : [a, x_0] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = f(x)$, dacă $x \in [a, x_0]$, $f_1(x_0) = 0$; $g_1(x) = g(x)$, dacă $x \in [a, x_0)$ și $g_1(x_0) = 0$ sînt continue pe $[a, x_0]$ (ele sînt prelungirile prin continuitate în punctul $x = x_0$ ale lui f, respectiv g) și că se verifică condițiile teoremei V.4.

Desigur are loc și o teoremă similară, înlocuind intervalul $[a, x_0]$ cu intervalul $(x_0, b]$, pentru limite la dreapta.

b) Regula lui l'Hospital ne permite să tratăm și alte cazuri exceptate, de pildă cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă ne interesează $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ și dacă $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, atunci putem scrie $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ și atunci $\frac{1}{g(x)}\to 0$, $\frac{1}{f(x)}\to 0$, reducîndu-ne astfel la cazul $\frac{0}{0}$, studiat anterior.

c) Este interesant că regula lui l'Hospital se aplică nu numai pentru x_0 finit, dar și în cazul cînd x_0 este „aruncat la infinit". Are loc atunci:

TEOREMA V.4″. Fie f și g funcții reale definite pe un interval $[a, \infty)$, $a > 0$. Presupunem că

1°. f și g sînt derivabile pe $[a, \infty)$;

2°. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l$, unde $l = 0$, ∞ sau $-\infty$;

3°. $g'(x) \neq 0$ pentru orice x suficient de mare ($x \geqslant A$, $A \geqslant a$);

4°. există $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ în $\overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există limita $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, egală cu λ.

(Un enunț similar are loc pentru $x \to -\infty$)

Demonstrație. Presupunem $l = 0$. Facem schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{u}$. Intervalul $[a, \infty)$ se transformă în $\left(0, \frac{1}{a}\right]$ în sensul că, dacă $x \in [a, \infty)$, atunci $u \in \left(0, \frac{1}{a}\right]$ și reciproc. Notăm $\varphi(u) = f\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi(u) = g\left(\frac{1}{u}\right)$; deoarece $l = 0$, avem $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \varphi(u) = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \psi(u) = 0$. Derivatele lor vor fi $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)$, $\psi'(u) = -\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)$. Putem aplica funcțiilor φ, ψ teorema V.4′ și rezultă

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \overset{\text{V.4′}}{=} \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{\varphi'(u)}{\psi'(u)} = \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{-\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2} g'\left(\frac{1}{u}\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{g'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Cazul $l = \infty$ sau $-\infty$ rezultă din b) etc.

Trebuie remarcat că în demonstrație am utilizat esențial faptul că în teorema lui Cauchy nu cerem derivabilitatea în capetele intervalului considerat, ci numai continuitatea.

Exemple

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^3 + x^2}{2x^3 - 100} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{21x^2 + 2x}{6x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42x + 2}{12x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2}$.

2) Nu întotdeauna posibilitatea aplicării corecte a regulii lui l'Hospital ne conduce la situații mai favorabile. De exemplu, calculul limitei $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ conduce la o „buclă infinită":

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \text{ etc.}$$

Cu metode elementare, se obține direct

$$l = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

În calculul limitelor de funcții se recomandă combinarea metodelor elementare cu regula lui l'Hospital.

Cazurile considerate anterior acoperă multe din situațiile care pot fi întîlnite. Reținem că în condițiile teoremelor V.4, V.4′, V.4″, existența limitei cîtului derivatelor asigură existența limitei cîtului inițial, limitele respective fiind egale.

Pînă acum am considerat numai cazurile exceptate $\dfrac{0}{0}$ și $\dfrac{\infty}{\infty}$. În cazurile exceptate $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, nu există reguli de tip l'Hospital care să fie direct aplicate și sînt necesare unele prelucrări ale funcției de sub limită. De exemplu, dacă $f \cdot g$ corespunde cazului $0 \cdot \infty$, atunci scriind $f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ se obține cazul $\dfrac{0}{0}$. Similar, în cazurile 0^0, ∞^0, 1^∞, putem scrie $f^g = e^{g \ln f}$ etc.

Exemplu

Calculăm $l = \lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1)$. Sîntem în cazul $\infty \cdot 0$. Scriind $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ ne reducem la $\dfrac{\infty}{\infty}$ și atunci putem aplica regula lui l'Hospital: $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{e^x} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n!}{e^x} = 0.$

Trebuie remarcat că regula lui l'Hospital se poate folosi și pentru calculul unor limite de șiruri, dar nu direct. Dacă avem o funcție $f:[k, \infty) \to \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$

și dacă $\lim_{n\to\infty} f(x) = \lambda\ (\lambda \in \overline{\mathbf{R}})$, atunci $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbf{N}}} f(n) = \lambda$, adică șirul $(f(n))_{n\geq k}$ converge către λ. De exemplu, pentru șirul $a_n = \frac{3n^2+n}{n^2+2}$ avem $a_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, unde $f(x) = \frac{3x^2+x}{x^2+2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Deoarece $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, rezultă că $\lim_{x\to\infty} a_n = 3$.

EXERCIȚII (capitolul V, § 1).

1. Să se determine intervalele de monotonie pentru funcțiile următoare $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^3 + 6x^2$;

b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x$;

c) $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

d) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$;

e) $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$;

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

g) $f(x) = x\sqrt{\frac{2+x}{x}}$;

h) $f(x) = x^3 \ln x$;

i) $f(x) = x \ln(-x)$;

j) $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$;

k) $f(x) = (x+2)e^{-x}$;

l) $f(x) = (x^2+x+1)e^{2x}$;

m) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$;

n) $f(x) = |x+2| - |2x+1|$.

2. Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (2^x+1)^{\frac{1}{x}}$ este monotonă.

3. Fie $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ o funcție și $x_0 \in (a, b)$ fixat. Să se arate că pentru orice număr real α există cel mult o funcție F derivabilă pe (a, b) astfel încît $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in (a, b)$ și $F(x_0) = \alpha$.

4. Să se afle extremele locale ale funcțiilor elementare următoare pe domeniul lor maxim de definiție:

a) $f(x) = x^4 - 10x^2$;

b) $f(x) = x - \arcsin x$;

c) $f(x) = 2x + \cos 2x$;

d) $f(x) = \frac{1}{x^3-3x}$;

e) $f(x) = x^5 \ln x$;

f) $f(x) = x^2 e^{-x-1}$;

g) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

h) $f(x) = 2\,\mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x$.

5. Să se calculeze, folosind regula lui l'Hospital, următoarele limite:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x-2}$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{2x}$;

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sin(x-2)}$;

d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2x-2}$;

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}\, x}{\sin x}$;

f) $\lim_{x\to 0} \frac{2x-\sin 2x}{x^3}$;

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - x}{x^2}$;

h) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\mathrm{ctg}\, \frac{\pi x}{2}}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\frac{1+x}{x}\right)$;

k) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\pi-2\operatorname{arctg} x)$;

l) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

m) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

n) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

o) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\,e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}$;

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{3x+2}$;

q) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^x$;

r) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$;

s) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(\sin\pi x)^{x-1}$;

t) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

6. Pentru două funcții f, g definite și derivabile într-o vecinătate a originii, scriem $f(x)\simeq g(x)$, dacă $f(0)=g(0)$ și $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Să se arate că

a) $\sin x\simeq x$;

b) $\cos x\simeq 1-\frac{x^2}{2}$;

c) $x-\operatorname{arctg} x\simeq\frac{1}{3}x^3$;

d) $x-\sin x\simeq\frac{1}{6}x^3$;

e) $\sqrt{1+x}-1-\frac{1}{2}x\simeq-\frac{1}{8}x^2$;

f) $\sqrt[3]{1+x}-1-\frac{1}{3}x\simeq-\frac{1}{9}x^2$;

g) $2x-\ln(1+2x)\simeq 2x^2$;

h) $a^x-b^x\simeq x\ln\frac{a}{b}$ $(a>0,\ b>0)$.

7. Să se arate că, deși limita $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$ există, regula lui l'Hospital nu poate fi aplicată aici direct.

8. Cum poate fi utilizată regula lui l'Hospital pentru a calcula $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbf{N}}}\frac{n}{e^n}$? Dar $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbf{N}}}(e^n+n)^{\frac{1}{n}}$?

9. Să se determine asimptotele următoarelor funcții $f: D\to\mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+8}$;

b) $f(x)=\frac{x^3+8}{x^2}$;

c) $f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

d) $f(x)=x+\frac{4}{x-1}$;

e) $f(x)=x-1+\frac{4}{x}$;

f) $f(x)=x\,e^{\frac{1}{x^2}}$;

g) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$;

h) $f(x)=\ln\frac{1-x}{2+x}$.

§ 2. Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

Am văzut ce informații se pot obține asupra comportării unei funcții derivabile cunoscînd derivata ei, mai precis zerourile și semnul derivatei. Vom vedea acum că derivata a doua (desigur în ipoteza că există) ne furnizează informații suplimentare asupra funcției, precizînd alura graficului.

2.1. Convexitate, concavitate

DEFINIȚIA V.1. O funcție $f : I \to R$, definită pe un interval I se numește convexă pe I dacă, pentru orice două puncte $x_1, x_2 \in I$ și pentru orice $t \in [0, 1]$, avem

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2). \tag{1}$$

Această condiție admite o interpretare geometrică sugestivă. Anume, să considerăm punctele $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 \neq x_2$ de pe graficul lui f. Atunci punctul $\alpha = (1-t)x_1 + tx_2$, $t \in [0,1]$ aparține segmentului de capete x_1, x_2. Coarda AB are ecuația $y = f(x_2) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_2)$ și ordonata punctului de abscisă α de pe această coardă va fi $\beta = f(x_2) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}[(1-t)x_1 + tx_2 - x_2] = f(x_2) + (1-t)[f(x_1) - f(x_2)] = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$. Condiția (1) se mai scrie $f(\alpha) \leqslant \beta$ și se exprimă spunînd că graficul lui f este situat sub orice coardă dacă unim două puncte situate pe graficul funcției, cu abscisele aparținînd lui I (fig. V.2).

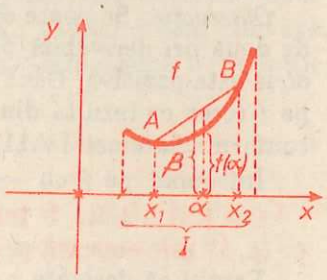


Fig. V.2

Funcția f se numește **concavă** pe I dacă funcția $-f$ este convexă pe I, adică în (1) are loc inegalitatea inversă. Geometric, aceasta revine la faptul că graficul funcției va fi situat deasupra coardei determinate de punctele $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ pe segmentul de capete x_1, x_2; $x_1, x_2 \in I$.

Dacă inegalitatea (1) este strictă, se spune că funcția f este *strict convexă* pe I (similar se definesc funcțiile strict concave). Uneori se mai spune că funcțiile convexe au „concavitatea în sus" (graficul lor „ține apa"), iar funcțiile concave au „concavitatea în jos" (sau, în limbaj familiar, graficul lor „nu ține apa" fig. V.3).

Fig. V.3

Pentru funcții de două ori derivabile pe un interval, putem demonstra un criteriu util de convexitate. Anume, are loc

TEOREMA V.5. Fie $a < b$ două numere reale și $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă. Presupunem că f', f'' există pe intervalul deschis (a, b) și că $f''(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, atunci funcția f este convexă pe intervalul $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Pentru orice punct $\alpha \in (x_1, x_2)$, aplicînd teorema lui Lagrange pe intervalele $[x_1, \alpha]$ și $[\alpha, x_2]$ există $\xi_1 \in (x_1, \alpha)$, $\xi_2 \in (\alpha, x_2)$ astfel încît

$$\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha} = f'(\xi_2).$$

Deoarece $\xi_1 < \xi_2$, rezultă $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ [deoarece funcția f' este monoton crescătoare pe (a, b); aici intervine ipoteza că $f'' \geqslant 0$ pe (a, b)].

Așadar, $\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{\alpha - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{x_2 - \alpha}$; înlocuind aici $\alpha = (1 - t)x_1 + tx_2$, $t \in (0, 1)$, se obține $\frac{f(\alpha) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)} \leqslant \frac{f(x_2) - f(\alpha)}{(1 - t)(x_2 - x_1)}$, adică $f(\alpha) \leqslant (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$, adică tocmai (1).

Observație. Se poate demonstra și afirmația reciprocă, anume dacă f este de două ori derivabilă pe un interval I și este convexă, atunci derivata a doua este pozitivă. Dacă f'' nu se anulează pe I, atunci f'' are semn constant pe I (ceea ce rezultă din faptul că $f'' = (f')'$ are proprietatea lui Darboux, conform teoremei IV.11).

Înlocuind pe f cu $-f$ rezultă următorul

COROLAR. O funcție continuă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă pe (a, b) este concavă pe $[a, b]$ dacă $f'' \leqslant 0$ pe (a, b).

Faptul că derivata a doua a unei funcții este pozitivă (respectiv negativă) pe un interval arată că, de fapt, coeficientul unghiular al tangentei la grafic este crescător (respectiv descrescător), deci că graficul are forma din figura V.3.

2.2. Intervale de convexitate, puncte de inflexiune

Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe un interval I. Dacă $f'' \geqslant 0$ (respectiv $f'' \leqslant 0$) pe I, atunci am văzut că I este un interval de convexitate (respectiv de concavitate) al lui f. Reținem deci că semnul derivatei a doua a unei funcții permite determinarea intervalelor pe care funcția respectivă este convexă sau concavă. De exemplu, dacă știm că o funcție este monoton descrescătoare și concavă, atunci graficul ei este de forma din figura V.4, *a* și nu de forma din figura V.4, *b*, *c*.

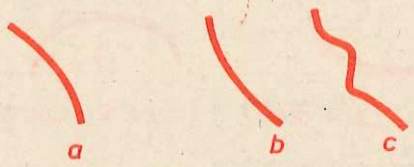


Fig. V.4

Semnul derivatei f'' într-un punct critic ne furnizează un criteriu suficient, de extrem. Are loc

TEOREMA V. 6. Dacă $x_0 \in (a, b)$ este un punct critic pentru o funcție $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, de două ori derivabilă și dacă $f''(x_0) > 0$ (respectiv $f''(x_0) < 0$), atunci x_0 este punct de minim local (respectiv de maxim local) pentru funcția f.

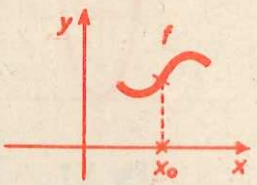


Fig. V.5

Demonstrație. Din faptul că $f''(x_0) > 0$, rezultă că există o vecinătate $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a punctului x_0, pe care f' este crescătoare.

Dar $f'(x_0) = 0$ prin ipoteză. Atunci $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0)$ avem $f'(x) \leqslant f'(x_0) = 0$, deci (în virtutea teoremei V.2) f este descrescătoare pe acest interval. Analog, pentru $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ avem $0 = f'(x_0) \leqslant f'(x)$, deci f este crescătoare pe intervalul $(x_0, x_0 + \delta)$; în concluzie, x_0 este un punct de minim pentru f. Demonstrația este similară în cazul $f''(x_0) < 0$.

Dacă funcția f este de două ori derivabilă în vecinătatea unui punct x_0, astfel încît $f''(x_0) = 0$ și dacă f'' își schimbă semnul de o parte și alta a lui x_0, atunci funcția își schimbă concavitatea în acel punct. De exemplu, dacă $f''(x) > 0$ pentru $x < x_0$ și $f''(x) < 0$ pentru $x > x_0$, atunci f este convexă la stînga lui x_0 și concavă la dreapta lui (fig. V.5). Dăm acum o definiție precisă.

DEFINIȚIA V. 2. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție continuă definită pe un interval $I \subset \mathbf{R}$. Un punct $x_0 \in I$ distinct de capetele lui I se numește punct de inflexiune pentru f dacă există puncte $\alpha < x_0 < \beta$ în I astfel încît f să fie convexă pe $(\alpha, x_0]$ și concavă pe $[x_0, \beta)$ sau invers (fig. V.6).

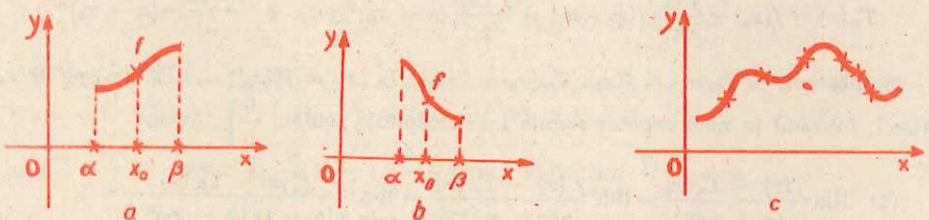


Fig. V.6

TEOREMA V. 7. Fie x_0 un punct și f o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate V a lui x_0. Dacă există $\alpha, \beta \in V$ astfel încît

1) $\alpha < x_0 < \beta$;

2) $f''(x_0) = 0$;

3) $f'' < 0$ pe (α, x_0) și $f'' > 0$ pe (x_0, β) sau invers (adică $f'' > 0$ pe (α, x_0) și $f'' < 0$ pe (x_0, β)), atunci x_0 este punct de inflexiune pentru f.

Demonstrația este evidentă din definiția V.2, folosind teorema V.5.

Trebuie remarcat că relația $f''(x_0) = 0$ singură nu implică faptul că x_0 este punct de inflexiune.

Exemple

1) Considerăm funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+4$. Avem $f'(x)=3x^2-12x$, $f''(x)=6x-12$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$. Semnul derivatei f'' este indicat în tabloul următor

x	$-\infty$		2		∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

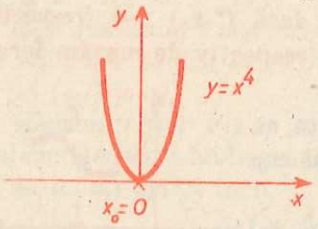


Fig. V.7

Aşadar, f este concavă pe intervalul $(-\infty, 2)$ şi convexă pe $(2, \infty)$, iar punctul $x=2$ este punct de inflexiune.

2) Pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^4$ avem $f''(x)=12x^2$ deci $f''(0)=0$; totuşi $x=0$ nu este punct de inflexiune, deoarece f este convexă şi la stînga şi la dreapta punctului $x=0$ (fig. V.7).

Aici punctul $x=0$ este punct de minim pentru f.

3) Pentru funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(x^2-4x+6)e^x$ avem $f'(x)=(x^2-2x+2)e^x$ şi $f''(x)=x^2e^x$, $\forall\, x\in\mathbf{R}$; ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţia $x=0$. Punctul $x=0$ nu este nici punct de extrem pentru f şi nici punct de inflexiune (deoarece $f'(0)\neq 0$ şi $f''(x)>0$ de o parte şi alta a originii).

2.3. Formula lui Taylor

Am văzut că în jurul unui punct o funcţie derivabilă poate fi aproximată printr-o funcţie de gradul întîi (adică graficul funcţiei este aproximat cu o linie dreaptă) şi se pune problema aproximării „mai bune" (cu eroare mai mică) prin polinoame de grad superior. Astfel, aproximarea pătratică va permite aproximarea graficului printr-o parabolă, în vecinătatea unui punct fixat.

Fie $x_0\in\mathbf{R}$ un punct fixat şi $f:V\to\mathbf{R}$ o funcţie de n ori derivabilă pe o vecinătate V a punctului x_0 astfel încît $f^{(n)}$ să fie continuă în x_0. În acest caz se poate considera *polinomul Taylor* asociat funcţiei şi punctului x_0

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Se observă că $T_n(x_0)=f(x_0)$, $T_n'(x_0)=f'(x_0)$, $T_n''(x_0)=f''(x_0)$, ..., $T_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$. Atunci, folosind în mod repetat regula lui l'Hospital $\left(\text{pentru } \frac{0}{0}\right)$, avem:

$$(2)\quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots$$

$$\ldots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

Notăm $\theta(x)=f(x)-T_n(x)$, $\forall\, x\in V$, deci $f(x)=T_n(x)+\theta(x)$, $\forall\, x\in V$.

TEOREMA V.8 *(formula lui B. Taylor, 1685–1731).* **Dacă f este o funcţie de n ori derivabilă într-o vecinătate a punctului x_0 şi $f^{(n)}$ este continuă în x_0, atunci are loc formula aproximativă**

$$(3)\quad f(x)\simeq f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

pentru orice $x\in V$, în care eroarea absolută $|\theta(x)|$ satisface condiţia $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|\theta(x)|}{(x-x_0)^n}=0$.

Demonstrație. Formula (3) revine la $f(x) \simeq T_n(x)$, $\forall\, x \in V$. Eroarea absolută este $|\theta(x)| = |f(x) - T_n(x)|$. Aplicînd (2) rezultă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \text{ deci } \lim_{x \to x_0} \frac{\theta(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

COROLARUL 1 (formula de aproximare pătratică). Fie f o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate V a unui punct x_0 cu f'' continuă în x_0. Atunci

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \tag{4}$$

unde eroarea $|\theta(x)|$ satisface condiția $\lim_{x \to x_0} \frac{\theta(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

În cazul funcțiilor polinomiale formula (3) este o formulă precisă. Anume, are loc următorul

COROLARUL 2. Dacă $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcție polinomială de gradul n și $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Demonstrație. Cu alte cuvinte, avem de arătat că $f(x) = T_n(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Dar f, T_n sînt funcții polinomiale de gradul n și, conform teoremei V.14, avem: $\lim_{x \to x_0} \frac{\theta(x)}{(x - x_0)^n} = 0$; cum θ este funcție polinomială de grad $\leqslant n$, rezultă $\theta(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$.

Exemple

1) Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ și $x_0 = 0$. În acest caz $f(0) = 1$, $f'(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1$. Formula (3) devine

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \theta(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta(x)}{x^n} = 0. \tag{5}$$

2) Pentru $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$, $x_0 = 1$ și $n = 5$, avem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$ și formula (3) devine

$$\sin x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \theta_1(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_1(x)}{x^5} = 0. \tag{6}$$

Similar,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta_2(x), \text{ unde } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_2(x)}{x^5} = 0. \tag{7}$$

3) Calculăm limita $l = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x} - \cos x + x}{x^2}$. Folosind (5), (7) avem:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\left[1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \theta_1(x)\right] - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \theta_2(x)\right] + x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \theta_1(x) - \theta_2(x)}{x^2}, \text{ deci } l = 1, \text{ deoarece } \lim_{x \to 0} \frac{\theta_1(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\theta_2(x)}{x^2} = 0.$$

4) Aplicăm formula lui Taylor funcției polinomiale $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ în jurul punctului $x_0 = 2$. Avem $P'(x) = 3x^2 - 4x + 1$, $P''(x) = 6x - 4$, $P'''(x) = 6$, ceea ce dă $P(2) = 3$, $P'(2) = 5$, $P''(2) = 8$, $P'''(2) = 6$.

Vom avea deci $P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3 =$
$= 3 + 5(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$.

Reciproc, formula lui Taylor ne permite să constituim un polinom dacă se cunosc derivatele sale succesive într-un punct dat.

EXERCIȚII (capitolul V, § 2)

1. Să se determine intervalele de convexitate și concavitate pentru funcțiile $f: D \to \mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

b) $f(x) = \sin x$;

c) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;

d) $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$;

e) $f(x) = x^2 \ln x$;

f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

g) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$;

h) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

2. Să se determine punctele de inflexiune pentru funcțiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^2$;

b) $f(x) = x^3 - 3x^2$;

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$;

d) $f(x) = \frac{x-9}{|x|+1}$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

f) $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}$;

g) $f(x) = x + 2\cos\frac{x}{2}$;

h) $f(x) = \cos x - \cos^3 x$;

i) $f(x) = \sin x - \sin^3 x$;

j) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

3. Presupunem că funcția $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă pe $[a, b]$, de două ori derivabilă pe (a, b) și astfel încît $f'' > 0$ pe (a, b). Să se arate că pentru orice $\alpha \in (a, b)$ tangenta la graficul lui f în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este dedesubtul graficului lui f.

4. Să se arate că dacă o funcție $f: I \to \mathbf{R}$ pe un interval I este o funcție convexă și $a, b \in I$, atunci $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

5. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ constante, $ab > 0$. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{x} + \lambda x$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Să se studieze monotonia și convexitatea lui f pe intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$; discuție.

6. Să se determine o funcție polinomială $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de gradul III astfel încît:

a) $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = -3$;

b) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$;

c) $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = k$, $k \neq 0$, real dat.

§ 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor

În cele ce urmează, vom subînțelege fixat un sistem ortogonal de axe xOy. Am adus, în capitolele anterioare, mai multe motivații asupra utilității graficelor de funcții. Subliniem din nou faptul că scopul nostru este studiul funcțiilor, trasarea graficului unei funcții fiind un mijloc extrem de util pentru a ilustra proprietățile ei locale și globale. Acum ne ocupăm de trasarea graficelor de funcții reale, extinzînd cazul funcțiilor elementare. Ca aplicație a rezultatelor teoretice stabilite pînă acum, utilizînd în mod esențial noțiunea de derivată, știm să indicăm deja anumite puncte importante ale graficelor (puncte de extrem, intersecții cu axele etc.), intervalele de monotonie, anumite drepte remarcabile (asimptote, semitangente etc.). Odată determinate aceste elemente, ele pot să fie figurate pe sistemul fixat de axe și permit redarea aproximativă a graficului funcției considerate.

Pentru a prezenta mai sistematic modul de lucru în trasarea graficului unei funcții (notată cu f), recomandăm parcurgerea următoarelor etape de determinare succesivă a unor elemente caracteristice ale funcției.

I. *Domeniul D de definiție al funcției.* Acesta este fie indicat în mod explicit de enunț, fie este subînțeles ca fiind domeniul maxim de definiție (în cazul funcțiilor elementare).

De pildă, pentru o funcție de tipul $\sqrt{g(x)}$ se pune condiția $g(x) \geqslant 0$, pentru ln $g(x)$ trebuie ca $g(x) > 0$, pentru un cît $\frac{g(x)}{h(x)}$ este necesar ca $h(x) \neq 0$, iar pentru arcsin $\varphi(x)$ este necesar ca $-1 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ etc. Dacă funcția este periodică, atunci este suficient ca funcția să fie studiată pe un interval de lungime cît perioada principală; trebuie atunci făcută distincția între domeniul de studiu și cel de definiție. De asemenea, în probleme cu conținut fizic, se poate întîmpla să apară restricții suplimentare pentru domeniul de studiu.

De îndată ce este indicat D se determină intersecțiile graficului funcției f cu axele de coordonate. Dacă $0 \in D$, atunci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, f(0))$, iar eventualele intersecții cu axa Ox sînt punctele $(a, 0)$, $a \in D$ unde $f(a) = 0$ și se obțin deci prin rezolvarea ecuației $f(x) = 0$.

II. *Semnul funcției și eventualele simetrii ale graficului.*

Dacă $f \geqslant 0$ (respectiv $f \leqslant 0$), atunci graficul lui f este situat deasupra (respectiv dedesubtul) axei Ox. Este util de a determina mulțimile de puncte unde graficul este situat deasupra, respectiv dedesubtul axei Ox. Dacă f este pară, atunci graficul lui f este simetric față de axa Oy, iar dacă f este impară, atunci graficul lui f este simetric față de origine. (Pentru o funcție pară sau impară, domeniul de studiu D poate fi restrîns, făcîndu-se studiul restricției funcției f la mulțimea $D \cap [0, \infty)$.)

III. *Limite la capete, continuitatea funcției, asimptote.*

Dacă mulțimea D este nemărginită, atunci este necesar studiul limitei lui f spre $+\infty$ (sau spre $-\infty$), determinîndu-se totodată asimptotele orizon-

tale (eventuale) ale lui f. Dacă D este o reuniune de intervale, atunci se calculează valorile sau limitele lui f la capetele fiecărui interval.

Se determină asimptotele verticale (eventuale), adică dreptele $x = x_0$, unde în punctul x_0 cel puțin una din limitele laterale $f(x_0 - 0)$ sau $f(x_0 + 0)$ este infinită.

În cazul cînd nu există asimptotă orizontală, de exemplu spre $+\infty$, se poate studia existența asimptotei oblice $y = mx + n$, dacă limitele $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx]$ există și sînt finite (similar pentru $-\infty$).

Deja din parcurgerea acestor trei etape ne putem da seama într-o oarecare măsură de alura generală a graficului. De asemenea, trebuie determinată mulțimea punctelor din domeniul de definiție în care f este continuă. Pasul următor este esențial.

IV. *Derivata întîi.* La acest punct se stabilește mai întîi mulțimea punctelor în care funcția f este derivabilă; se calculează derivata f'. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și astfel se determină punctele critice ale lui f și intervalele pe care f' are semn constant. Din studiul punctelor critice, combinat cu cel al intervalelor de monotonie, putem decide care din acestea sînt puncte de maxim sau minim local pentru f. Mai precis, dacă x_0 este un punct critic și dacă într-o vecinătate a lui x_0 avem $f'(x) \geqslant 0$, pentru $x < x_0$ și $f'(x) \leqslant 0$ pentru $x > x_0$, atunci este evident că x_0 este un punct de maxim local pentru f (deoarece f crește pînă în x_0 și descrește după x_0); similar, dacă într-o vecinătate a lui x_0, $f'(x) \leqslant 0$ pentru $x < x_0$ și $f'(x) \geqslant 0$ pentru $x > x_0$, atunci x_0 va fi un punct de minim local pentru f. Nu trebuie uitat că dacă f este definită pe un interval închis, se poate ca funcția să aibă extreme la capetele intervalului, fără ca f' să se anuleze, după cum se poate întîmpla ca f să admită extrem în punctele unde f' nu există (de exemplu, $f(x) = |x|$ are un minim în punctul $x = 0$, deși f nu este derivabilă în $x = 0$). În general, trebuie studiată funcția și pe mulțimea punctelor în care nu este derivabilă (puncte unghiulare, puncte de întoarcere, semitangente etc.).

Dacă funcția f este de două ori derivabilă, atunci, pentru trasarea ceva mai precisă a graficului lui f se adaugă etapa:

IV'. *Studiul derivatei a doua.* Calculul rădăcinilor reale ale ecuației $f''(x) = 0$ și semnul lui f'' permit determinarea intervalelor de convexitate și a punctelor eventuale de inflexiune. În particular, semnul derivatei a doua în punctele critice permite a se decide care dintre acestea sînt puncte de extrem, cf. teoremei V.6.

V. *Tabloul de variație.*

Rezultatele obținute pot fi sintetizate într-un tablou avînd trei rubrici orizontale sau patru (dacă funcția este de două ori derivabilă și forma derivatei secunde permite determinarea semnului, respectiv a rădăcinilor sale): prima este pentru valorile remarcabile ale lui x, în a doua se trec valorile corespunzătoare ale lui f' și semnul lui f', iar în rubrica a treia se trec valorile lui f, limitele la capete și semnele indicînd creșterea sau descreșterea funcției f.

Asimptotele verticale se marchează prin linii verticale punctate în acest tablou, trecîndu-se în linia a treia limitele laterale corespunzătoare. În a patra rubrică se trece semnul lui f''. Menționăm că în practică la această rubrică pot apărea mari dificultăți de calcul și, în acest caz, ea se poate omite.

Trebuie remarcat că apariția unor contradicții în tabloul de variație (de exemplu creștere spre $-\infty$, descreștere spre $+\infty$, creștere de la $+\infty$ încolo etc.) indică greșeli de calcul la determinarea limitelor funcției sau în expresia derivatei f', în rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$, la intersecțiile cu axele, asimptote etc.

VI. *Trasarea graficului.*

Pe sistemul ortogonal de axe xOy fixat se figurează elementele determinate la etapele anterioare. Graficul funcției va fi o submulțime a mulțimii $D \times \mathbf{R}$ (hașurîndu-se complementara mulțimii $D \times \mathbf{R}$ din $\mathbf{R}^2$). Punctele remarcabile ale graficului se unesc printr-o linie curbă, ținîndu-se cont de monotonia funcției, de asimptote și în general de rezultatele sintetizate în tabloul de variație. Pentru a trasa cît mai corect graficul funcției se recomandă a cunoaște mai multe valori ale funcției și ale derivatei. În fapt, ceea ce facem este o „interpolare" ținînd seama de valorile remarcabile găsite.

În continuare vom da mai multe exemple de reprezentări grafice, cu parcurgerea sistematică a etapelor I — VI menționate.

EXEMPLE

1) $\boxed{f(x) = x^3 + x^2}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Intersecțiile cu axele sînt $(0,0)$, $(-1,0)$.

II. Funcția nu este pară, nici impară. Ea este pozitivă ($f(x) \geqslant 0$) pentru $x^3 + x^2 \geqslant 0$, adică pentru $x \geqslant -1$.

III. Limitele la capete sînt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x^2) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (x^3 + x^2) = \infty$. Nu există asimptote. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. Derivata întîi este $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -\frac{2}{3}$, $x_2 = 0$ (punctele critice ale lui f). Evident $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$ și $f(0) = 0$.

V. Tabloul de variație este

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

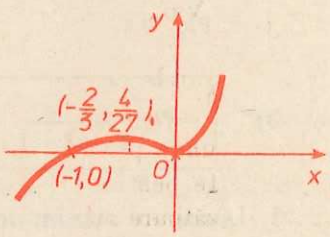


Fig. V.8

VI. Graficul (fig. V.8).

(Se observă că pentru $x \geqslant -1$ graficul este situat deasupra axei Ox.)

2) $\boxed{f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Graficul nu taie axa Oy (pentru că $0 \notin D$). Intersecțiile cu axa Ox se determină rezolvînd ecuația $f(x) = 0$, adică $x + 1 = 0$; există o singură intersecție cu axa Ox, anume punctul $A(-1, 0)$.

II. Funcția nu este pară și nici impară: avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $\frac{x+1}{x^2} \geqslant 0$, adică $x \geqslant -1$, $x \neq 0$.

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x+1}{x^2} = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x+1}{x^2} = \infty$ și $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Așadar, dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală (spre $-\infty$ și spre $+\infty$); apoi $x = 0$ este asimptotă verticală. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

IV. Avem $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{-x-2}{x^3}$, $\forall\, x \in D$; de obicei se recomandă ca numitorul să fie pozitiv, pentru a determina mai ușor semnul derivatei, deci $f'(x) = -\frac{x(x+2)}{x^4}$, $\forall\, x \neq 0$. Ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție, anume $x = -2$, dar derivata f' își schimbă semnul în punctele $x = -2$, $x = 0$ (chiar dacă în punctul $x = 0$ ea nu este definită).

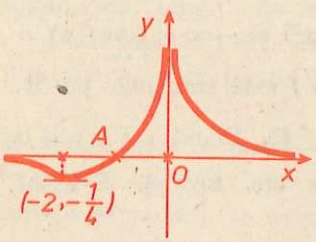


Fig. V.9

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞	$\infty \searrow 0$	

VI. Graficul (fig. V.9).

3) $\boxed{f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$; graficul are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Funcția este pozitivă pe întreg $\mathbf{R}$, deci graficul este situat deasupra axei Ox. Apoi funcția este pară, deoarece $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Este suficient să facem studiul restricției lui f la mulțimea $D_1 = [0, \infty)$.

III. Avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$ (gradul numărătorului fiind mai mic decît gradul numitorului). Așadar, $y = 0$ este asimptotă spre $+\infty$. Graficul nu admite asimptote verticale sau oblice. De asemenea, funcția f este continuă pe întreg domeniul de definiție.

IV. Pentru $x \geqslant 0$ avem $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, deci $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $\forall\, x > 0$ și ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x = \pm 1$ (pentru $x > 0$ se consideră numai $x = 1$). Apoi $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 1$, conform obs. 1, pag. 156, și semitangenta la grafic în origine face unghiul $\dfrac{\pi}{4}$ cu axa Ox.

V. Tabloul de variație:

x	0				1				∞
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			$\frac{1}{2}$	$\searrow$			0

VI. Graficul pe intervalul $[0, \infty)$ este indicat în figura V.10, *a*. Deoarece funcția f este pară, ea are pe $\mathbf{R}$ graficul din figura V.10, *b*. Punctul $x = 0$ este punct unghiular.

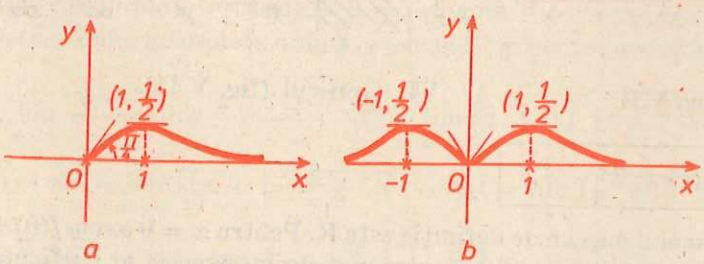


Fig. V.10

4) $\boxed{f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = [0, \infty) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$. Graficul are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in D$. Graficul nu admite simetrii (față de Oy sau față de origine).

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2} = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 0 \cdot 1 = 0.$

Axa Ox este asimptotă orizontală (spre $+\infty$), iar $x = 1$ este asimptotă verticală.

IV. $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^2 - \sqrt{x}\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)^2 - 4x(x-1)}{2\sqrt{x}(x-1)^4} =$

$= \frac{-(x-1)\cdot(3x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^4}$, $\forall\, x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Funcția f nu este derivabilă în punctul $x = 0$ și $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)^2} = \infty$; de altfel $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \infty$. Atunci graficul are ca semitangentă în origine semiaxa pozitivă Oy.

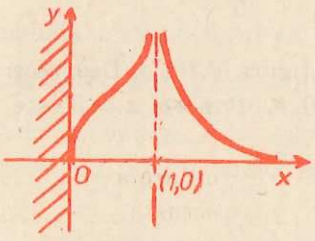


Fig. V.11

V. Tabloul de variație:

x	0		1		∞
$f'(x)$	‖	∞ $+$	‖	$-$	
$f(x)$	‖	0 $\nearrow$	∞	∞ $\searrow$	0

VI. Graficul (fig. V.11).

5) $\boxed{f(x) = 3^x - 3^{-x}}$

I. Domeniul maxim de definiție este $\mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 3^\circ - 3^\circ = 1 - 1 = 0$ și originea este unicul punct de intersecție al graficului cu axele.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $3^x \geqslant 3^{-x}$, adică $x \geqslant 0$. Funcția este impară, deoarece $f(-x) = 3^{-x} - 3^x = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci graficul este simetric față de origine și ar fi suficient studiul pentru $x \geqslant 0$.

III. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3^x - \lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x} = 0 - \infty = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty - 0 = \infty$. Graficul nu are asimptote și funcția este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. $f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 3^{-x} \cdot \ln 3 = (3^x + 3^{-x}) \cdot \ln 3$.

Deoarece ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții, derivata f' are semn constant; de altfel $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe întreg $\mathbf{R}$. Se observă că $f'(0) = 2 \ln 3$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	$2\ln 3$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

VI. Graficul (fig. V.12).

Fig. V.12

6) $\boxed{f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}}$

I. Domeniul maxim de definiție D este definit prin $x^2 + 2x \geqslant 0$, deci $D = (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$. Pentru $x = 0$ avem $f(0) = 0$; apoi ecuația $f(x) = 0$ $x + \sqrt{x^2 + 2x} = 0$ are unica soluție $x = 0$. Așadar, graficul lui f are o singură intersecție cu axele, anume originea.

II. Dacă $x \geqslant 0$, este evident că $f(x) \geqslant 0$, iar dacă $x \leqslant -2$, atunci $f(x) < 0$. Graficul nu admite simetrii.

III. Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \overset{x=-z}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z + \sqrt{z^2 - 2z}) = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{z^2 - 2z - z^2}{\sqrt{z^2 - 2z} + z} =$

$$= \lim_{z\to\infty} \frac{-2z}{z\left(\sqrt{1 - \frac{2}{z}} + 1\right)} = \lim_{z\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{2}{z}} + 1} = -1.$$

Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -2$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty + \infty = \infty$.

Graficul admite asimptota orizontală $y = -1$ spre $-\infty$ și nu are asimptote verticale. Determinăm asimptota oblică (eventuală) și pentru aceasta, calculăm

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) = 2,$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} [(x + \sqrt{x^2 + 2x}) - 2x] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Așadar, dreapta $y = 2x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

IV. Derivata este $f'(x) = 1 + \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}$

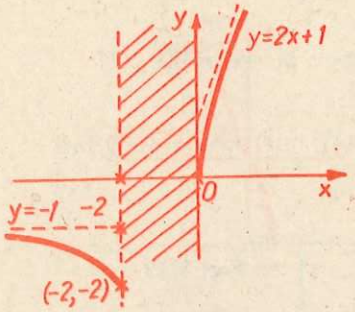


Fig. V.13

Ecuația $f'(x) = 0$ devine $\sqrt{x^2+2x} = -x-1$ și nu admite soluții.

Așadar derivata f' are semn constant pe fiecare din intervalele $(-\infty, -2)$ și $(0, \infty)$. Se observă că $f'_s(-2) = \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f'(x) = -\infty$ și $f'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \infty$.

Punctele $x = -2$, $x = 0$ sînt puncte de minim pentru f.

V. Tabloul de variație este:

x	$-\infty$		-2		0		∞
$f'(x)$		$-$ $-$	$-\infty$	∞	$+$	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2		0	$\nearrow$	∞

VI. Graficul este indicat în figura V.13.

7) $\boxed{f(x) = 1 - \sqrt{|x^2-1|}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$.

II. Avem $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant |x^2-1| \Leftrightarrow -1 \leqslant x^2-1 \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Funcția f fiind pară, este suficient de studiat comportarea ei pe intervalul $[0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (1 - \sqrt{x^2-1}) = -\infty$.

Funcția nu admite asimptote verticale și nici asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Apoi, $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} - \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right) = -1$,

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to\infty} [1 + x - \sqrt{x^2-1}] = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^2 - (x^2-1)}{1 + x + \sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{1+x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2 + \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x} + 1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}\right)} = 1,$$

deci $y = -x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$. Funcția f este continuă pe $\mathbf{R}$.

IV. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1-x^2}, & \text{dacă } x \in [-1, 1] \\ 1 - \sqrt{x^2-1}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$

Deci, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$

(în punctele $x = \pm 1$ funcția f nu este derivabilă; aplicînd corolarul teoremei IV.10, este important de observat că $f'_s(-1) = \infty$, $f'_d(-1) = -\infty$, $f'_s(1) = \infty$, $f'_d(1) = -\infty$, deci punctele -1, 1 sînt puncte de întoarcere și simultan puncte de maxim).

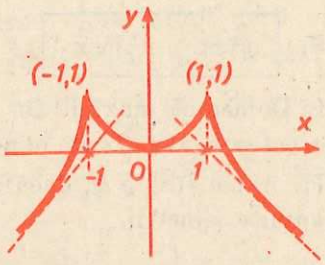


Fig. V.14

V. Tabloul de variație pe intervalul $[0, \infty)$ este:

x	0		1		∞
$f'(x)$	0	$+$	∞ | $-\infty$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

VI. Graficul (fig. V.14).

8) $\boxed{f(x) = x \cdot e^{-x} \cdot \sigma(x)}$.

I. Așadar $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$.

Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Domeniul de studiu efectiv este $D_1 = [0, \infty)$, deoarece pentru $x < 0$ avem $f(x) = 0$.

II. Dacă $x \geqslant 0$ este evident că $f(x) = xe^{-x} \geqslant 0$, deci graficul este situat deasupra axei Ox.

III. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$ (aplicînd regula lui l'Hospital). Funcția nu admite asimptote verticale și are $y = 0$ asimptotă orizontală spre $+\infty$ (și spre $-\infty$). De asemenea, funcția f este continuă pe întreg $\mathbf{R}$ (căci este continuă pentru $x < 0$, pentru $x > 0$, iar în origine $f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$).

IV. Pentru $x < 0$ avem $f'(x) = 0$ și pentru $x > 0$ avem $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x) \cdot e^{-x}$. Funcția f nu este derivabilă în $x = 0$ (căci $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$). Apoi f' se anulează pentru $x = 1$. Evident, $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$	0		1		∞
$f'(x)$	0	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

VI. Graficul (fig. V.15).

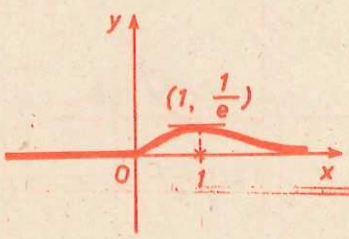


Fig. V.15

9) $\boxed{f(x) = x^2 \ln x}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Graficul intersectează axa Ox în punctul $A(1, 0)$.

II. Avem $f(x) \geqslant 0$, dacă și numai dacă $\ln x \geqslant 0$, adică $x \geqslant 1$. Graficul nu admite simetrii.

III. Limitele la capete: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = 0$

(folosind regula lui l'Hospital); apoi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln x = \infty \cdot \infty = \infty$.

Funcția nu admite asimptote.

IV. $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$, $\forall\, x > 0$.

Ecuația $f'(x) = 0$ devine $2 \ln x + 1 = 0$, deci $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

V. Tabloul de variație:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	∞

se observă că $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$ și că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x(2 \ln x + 1) =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{2 \ln x + 1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (-2x) = 0$.

VI. Graficul (fig. V.16).

(Săgeata semnifică faptul că funcția f nu este definită în $x = 0$, dar are limită la dreapta în punctul $x = 0$.)

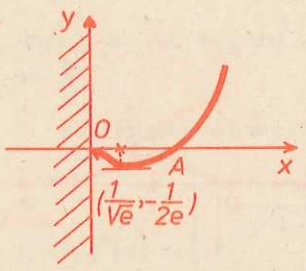


Fig. V.16

Observație. Pentru studiul și reprezentarea grafică a funcțiilor exponențiale și logaritmice se utilizează următoarele fapte. Pentru orice $n \geqslant 1$ întreg, avem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty.$$

(se mai spune că exponențiala „crește mai repede" spre infinit decît orice putere x^n, care la rîndul ei crește mai repede decît logaritmul lui x).

Din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$, prin logaritmare rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \ln x) = \infty$.

De asemenea, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^x \overset{x=-z}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z\, e^{-z}) = -\lim\limits_{z\to\infty} \frac{z}{e^z} = 0$ și analog, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \overset{x=-\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} (-z\, e^{-z}) = 0$. Apoi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} \overset{x=\frac{1}{z}}{=} \lim\limits_{z\to\infty} z\, e^z = \infty$;

de asemenea, $\lim\limits_{x\to\infty} (5x - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{e^{5x}}{x} = \ln \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{5x}}{x} = \infty$.

10) $\boxed{f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R}$. Deoarece funcția f este periodică de perioadă principală 2π, este suficient de studiat comportarea funcției pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$. Avem $f(0) = 0$ și dacă $f(x) = 0$, atunci $\sin x + \sin x \cos x = 0$, de unde $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ (zerourile situate în I). Așadar, intersecțiile graficului cu axele sînt $A_1(-\pi, 0)$, $A_2(0, 0)$, $A_3(\pi, 0)$.

II. Graficul este simetric față de origine (deoarece funcția f este impară). Am fi putut reduce studiul funcției la intervalul $[0, \pi]$.

III. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to-\pi\\ x>-\pi}} f(x) = f(-\pi) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x) = f(\pi) = 0$, rezultă că funcția f este continuă în punctele $x = -\pi$, $x = \pi$, deci în I (și chiar pe întreg $\mathbf{R}$). Funcția nu admite asimptote (de altfel orice funcție periodică neconstantă nu admite asimptote orizontale sau oblice).

IV. Avem $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Soluțiile din I ale ecuației $f'(x) = 0$ sînt $-\pi$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, π.

V. Tabloul de variație:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

VI. Graficul (fig. V.17).

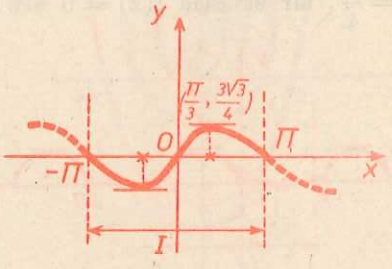


Fig. V.17

11) $\boxed{f(x) = \ln(1 + \sin x + |\sin x|)}$.

I. Aşadar, $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2\sin x), & \text{dacă } \sin x > 0 \\ 0, & \text{dacă } \sin x \leqslant 0 \end{cases}$.

Domeniul maxim de definiţie este $D = \mathbf{R}$. Avem $f(0) = 0$, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are ca soluţii toate punctele unde $\sin x \leqslant 0$.

II. Funcţia este periodică de perioadă principală 2π şi este suficient să fie studiată pe intervalul $I = [-\pi, \pi]$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0] \\ \ln(1 + 2\sin x), & \text{dacă } x \in (0, \pi], \ \forall\, x \in I \end{cases}.$$

III. $\lim\limits_{\substack{x \to -\pi \\ x > -\pi}} f(x) = \ln 1 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ x < \pi}} f(x) = \ln 1 = 0$.

Graficul nu admite asimptote.

IV. Avem $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [-\pi, 0) \\ \dfrac{2\cos x}{1 + 2\sin x}, & \text{dacă } x \in (0, \pi] \end{cases}$.

În punctul $x = 0$, $f'_s(0) = 0$ şi $f'_d(0) = 2$, deci $x = 0$ este punct unghiular.

V. Tabloul de variaţie:

x	$-\pi$		0			$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	0	2	$+$	0	$-$	-2	
$f(x)$	0	0	0	$\nearrow$	$\ln 3$	$\searrow$	0	

VI. Graficul (fig. V.18).

12) $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}}$.

I. Domeniul maxim de definiţie este $D = (-\infty, 1)$. Apoi $f(0) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, iar ecuaţia $f(x) = 0$ are unica soluţie $x = -1$.

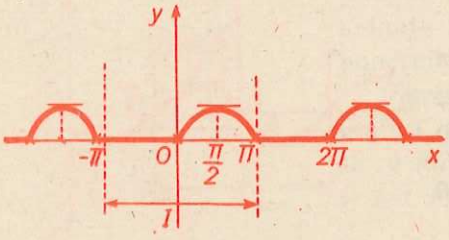


Fig. V.18

Deci intersecţiile cu axele sînt $A\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, $B(-1, 0)$.

II. Graficul nu admite simetrii. Apoi el este situat deasupra axei Ox, dacă şi numai dacă $f(x) \geqslant 0$, adică $\dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} \geqslant 0$, $-1 \leqslant x < 1$.

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \operatorname{arctg}(-\infty) =$

$= -\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \operatorname{arctg}\infty = \dfrac{\pi}{2}$. Dreapta $x = 1$ nu este asimptotă verticală, iar dreapta $y = -\dfrac{\pi}{2}$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

IV. $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^2}\cdot\dfrac{\sqrt{1-x}+\dfrac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \dfrac{3-x}{2(x^2+x+2)\sqrt{1-x}}$,

pentru orice $x < 1$. Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții (deoarece punctul $x = 3$ nu aparține lui D). Așadar, f' are semn constant pe D, anume $f' > 0$. Se observă, de asemenea, că $f'_s(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \infty$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-1		0		1
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	∞
$f(x)$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

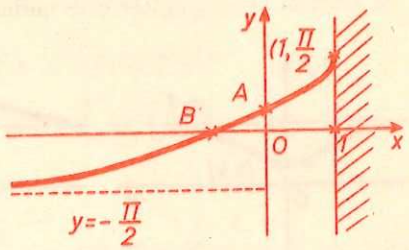


Fig. V.19

VI. Graficul este cel din figura V.19.

Ne oprim aici cu prezentarea exemplelor de reprezentări grafice. Vă recomandăm fiecăruia dintre voi nu numai înțelegerea acestor exemple, ci și rezolvarea a cît mai multor exerciții cu reprezentări grafice, pînă la obținerea unei experiențe suficiente care să vă permită să folosiți graficele ca un mijloc curent de ilustrare a variației unor mărimi sau a evoluției unor procese.

În unele aplicații se utilizează așa-numitele „grafice cu parametri". Fie $f : D \times P \to \mathbf{R}$ o funcție reală de două variabile reale; așadar, pentru orice $x \in D$, $k \in P$ este definit numărul real $f(x, k)$. Pentru fiecare k fixat, $k \in P$ este definită cîte o funcție $D \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x, k)$, al cărei grafic are ecuația $y = f(x, k)$. Se mai spune că avem o familie de funcții pe D, cu parametrul k.

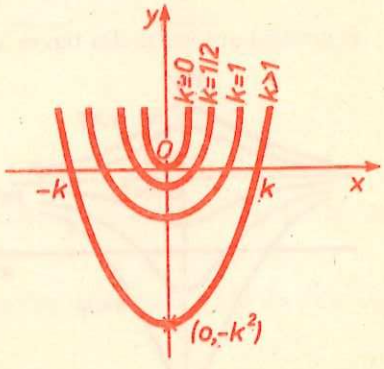


Fig. V.20

Exemple

1) Fie $D = \mathbf{R}$, $P = [0, \infty)$ și $f : D \times P \to \mathbf{R}$, $f(x, k) = x^2 - k^2$. Aceasta reprezintă o familie de parabole (pentru fiecare k cîte o parabolă, fig. V.20).

2) Trasăm graficul familiei de funcții $D = \mathbf{R}$, $P = \mathbf{R}$, $f : D \times P \to \mathbf{R}$, $f(x, k) = \dfrac{x^2 + k}{x^2 + 1}$.

Presupunem mai întîi $k \geqslant 0$. Atunci graficul nu intersectează axa Ox. Pentru orice k, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ și nu avem asimptote verticale. Apoi

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+k)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-k)x}{(x^2+1)^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

deci derivata se anulează în origine.

Dacă $0 \leqslant k < 1$, atunci tabloul de variație este

x	$-\infty$		0		∞
$f'_x(x, k)$		$-$	0	$+$	
$f(x, k)$	1	$\searrow$	k	$\nearrow$	1

și graficul corespunzător este indicat în figura V.21, *a*.

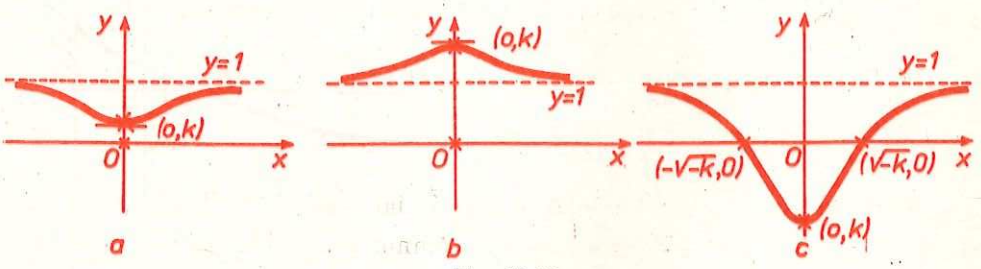


Fig. V.21

Dacă $k = 1$, atunci, de la început, $f(x, 1) = 1$, $\forall\, x$, adică graficul este dreapta $y = 1$.

Dacă $k > 1$, atunci tabloul de variație este

x	$-\infty$		0		∞
$f'_x(x, k)$		$+$	0	$-$	
$f(x, k)$	1	$\nearrow$	k	$\searrow$	1

și graficul are forma din figura V.21, *b*.

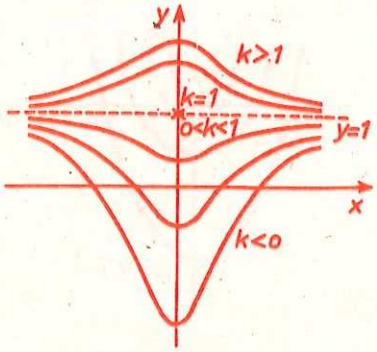


Fig. V.22

Presupunem acum $k < 0$. În acest caz graficul intersectează axa Ox în punctele $\pm\sqrt{-k}$. Tabloul de variație este

x	$-\infty$		$-\sqrt{-k}$		0		$\sqrt{-k}$		∞
$f'_x(x, k)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x, k)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	k	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

și graficul este de forma din figura V.21, *c*.

Întreaga discuție poate fi rezumată în cadrul unui singur desen (fig. V.22).

În exemplele precedente am omis studiul derivatei a doua. Iată acum două exemple în care se folosește și derivata a doua.

13) $\boxed{f(x) = x^2 + \frac{8}{x}}$.

I. Domeniul maxim de definiție este $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Graficul nu intersectează axa Oy. Ecuația $f(x) = 0$, adică $x^3 = -8$, are o unică soluție reală, anume $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

II. Graficul nu are simetrii. Apoi $f(x) \geqslant 0$ dacă și numai dacă $x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.

III. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Dreapta $x = 0$ este o asimptotă verticală și nu există alte asimptote.

IV. Pentru orice $x \neq 0$, avem $f'(x) = 2x - \frac{8}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x^3 - 4)$ și $f''(x) = 2 + \frac{16}{x^3} = \frac{2(x^3 + 8)}{x^3} = \frac{2(x^3 - 2x + 4)}{x^4}(x + 2)x$.

Ecuația $f'(x) = 0$ are unica soluție $x = \sqrt[3]{4}$, iar ecuația $f''(x) = 0$ are soluția $x = -2$. Semnul lui f'' este același cu semnul produsului $x(x + 2)$. Punctul $x = -2$ este punct de inflexiune.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		-2			0		$\sqrt[3]{4}$		∞
$f'(x)$		$-$	-6	$-$			$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$			$+$		$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	$6\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	∞

VI. Graficul (fig. V.23).

14) $\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$.

I. Domeniul de definiție este $D = \mathbf{R}$; graficul intersectează axa Oy în punctul $A(0, 1)$.

II. Funcția f este pară și $f \geqslant 0$, deci graficul este simetric față de axa Oy și este situat deasupra axei Ox.

III. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$.

Graficul are asimptota orizontală $y = 0$ spre $+\infty$ și spre $-\infty$.

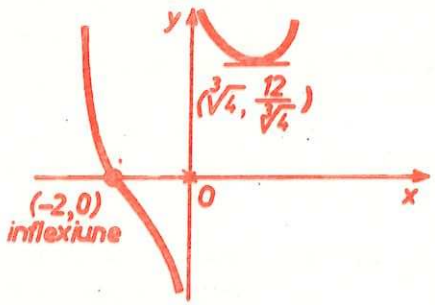


Fig. V.23

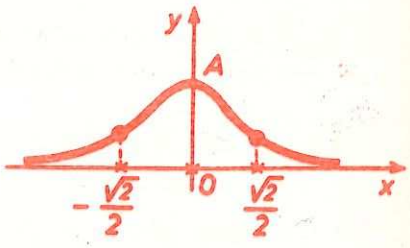


Fig. V.24

IV. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

V. Tabloul de variație:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		∞
$f'(x)$		$+$	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	$+$	0	$-$	$-\sqrt{\frac{2}{e}}$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	0
		$\cup$		$\cap$		$\cap$		$\cup$	

VI. Graficul corespunzător are forma celui din figura V.24.
Acest grafic poartă numele de *clopotul lui K.F. Gauss* (1777—1855).

EXERCIȚII (capitolul V, § 3)

1. Să se reprezinte grafic următoarele funcții polinomiale (folosind numai derivata întîi):

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$;
b) $f(x) = 3x^3 - 27$;
c) $f(x) = x^4 - 8x^2$;
d) $f(x) = x^5 - 5x^4$;
e) $f(x) = x^3 - 3x + 2$;
f) $f(x) = x^2(x+1)^2$;
g) $f(x) = (1 - x^3)(1 - x^2)$;
h) $f(x) = x^n - nx$ ($n \geqslant 1$ natural).

2. Să se reprezinte grafic următoarele funcții raționale:

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$;
b) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$;
d) $f(x) = \frac{x-1}{x^4}$;
e) $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$;
f) $f(x) = \frac{x^2-16}{x}$;
g) $f(x) = \frac{7x^2+20x}{x^2+2x-3}$;
h) $f(x) = x + \frac{4}{x}$;
i) $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$;
j) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$;
k) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;
l) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

3. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$;

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

e) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x+1}{x+4}}$;

f) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$;

g) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$;

h) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

i) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$;

j) $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$;

k) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1}, & \text{dacă } x < 1; \\ x, & \text{dacă } x \geqslant 1; \end{cases}$

l) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{dacă } x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x > 0; \end{cases}$

m) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

n) $f(x) = x + 2\sqrt{-x}$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x]$, să se arate că $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus(-2, 1)$ avem $xf(x)f'(x) \geqslant 0$ și să se traseze graficul lui f.

5. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = e^x - 1$;

b) $f(x) = e^x - x$;

c) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

e) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

f) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$;

h) $f(x) = (x^2 + x)e^{-x}$;

i) $f(x) = |\ln x + x|$;

j) $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{1 + \ln|x|}$;

k) $f(x) = \ln(4 - x^2)$;

l) $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

6. Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

a) $f(x) = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sin x}$;

c) $f(x) = \sin x - \cos x$;

d) $f(x) = \ln(2 + \sin x)$;

e) $f(x) = x + \sin x$;

f) $f(x) = 2x - \cos 2x$;

g) $f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} x$;

h) $f(x) = 2 \arcsin \frac{1}{x} - \arccos \frac{1}{x}$;

i) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

j) $f(x) = x + \ln(\cos x)$.

7. Să se reprezinte grafic următoarele funcții: $f : D \to \mathbf{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție), folosind și derivata a doua:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$;

b) $f(x) = xe^{-x^2}$;

c) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$;

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$;

e) $f(x) = \sin x - \cos x$;

f) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

g) $f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$;

h) $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)$;

i) $f(x) = \ln \frac{x + 1}{x - 2}$;

j) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.

8. Se consideră funcția $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + ax + a}$, a fiind un parametru real, $a > 0$. Să se determine a astfel încît graficul lui f să aibă o singură asimptotă verticală și să se reprezinte apoi graficul funcției f pentru a astfel găsit.

9. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x + k}{\sqrt{x}}$, k fiind un parametru real. Să se determine parametrul k astfel încît $f'(1) = -1$ și apoi să se reprezinte grafic funcția f.

10. Să se reprezinte graficele funcțiilor următoare ce depind de parametri:

a) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x + k}{x}$, $k > 0$;

b) $f : [-k, k] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{k^2 - x^2}$, $1 \leqslant k \leqslant 2$;

c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x + 2)e^{kx}$, $k \in \mathbf{R}$;

§ 4. Probleme de maxim și minim; optimizări

Acest paragraf cuprinde aplicații directe ale rezultatelor teoretice anterioare privind determinarea punctelor de extrem ale unor funcții reale de o variabilă reală. În același timp, avem aici un prilej deosebit de a exemplifica forța metodelor analizei matematice în rezolvarea unor probleme de mode-

lare a realității fizice. Citîndu-l pe matematicianul și pedagogul G. Polya, „problemele de maxim și minim idealizează o înclinație a naturii și a noastră înșine de a obține efecte optime cu eforturi minime".

1) *Dintre toate numerele reale $x > 0$, să se determine cel pentru care diferența $x - x^3$ este maximă.*

Soluție. Notăm $f(x) = x - x^3$. Trebuie să determinăm maximul lui f pe intervalul $(0, \infty)$. Aplicînd teorema lui Fermat, rezolvăm mai întîi ecuația $f'(x) = 0$, adică $1 - 3x^2 = 0$. Se obține soluția $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Din tabloul de variație

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\infty$

rezultă că punctul $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ este un punct de maxim pentru funcția f și totodată soluția problemei puse.

(Se putea observa și direct că $f''(x) = -6x$, deci că $f''(x_0) < 0$, adică x_0 este punct de maxim cf. teoremei V.6).

2) *Să se determine extremele locale și extremele globale ale funcției $f(x) = 2x + \cos 2x$ pe intervalul $I = [-2, 1]$.*

Soluție. Avem $f'(x) = 2 - 2\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Punctele critice ale lui f sîntdate de ecuația $f'(x) = 0$, deci $\sin 2x = 1$, $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Tabloul de variație a lui f pe intervalul I este

x	-2		$\frac{\pi}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-4 + \cos 4$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$2 + \cos 2$

Funcția f nu are extreme locale în I, deoarece f este monoton crescătoare pe I; rezultă $\inf\limits_{x \in I} f(x) = f(-2) = -4 + \cos 4$ și $\sup\limits_{x \in I} f(x) = f(1) = 2 + \cos 2$.

3) *Presupunem că puterea $P(t)$ emisă la descărcarea unui dispozitiv electronic la fiecare moment $t > 0$ este $P(t) = t^3 \cdot e^{-0,2t}$ (puterea fiind măsurată în wați și timpul în secunde). Să se afle:*

a) *la ce moment puterea va fi maximă;*

b) *între ce limite (margini) variază puterea $P(t)$ în intervalul de timp $t \in [10, 20]$.*

Soluție. a) $P'(t) = 3t^2 \cdot e^{-0,2t} - 0,2t^3 \cdot e^{-0,2t} = t^2 \cdot e^{-\frac{1}{5}t}\left(3 - \frac{t}{5}\right)$; ecuația $P'(t) = 0$ are soluțiile $t = 0$, $t = 15$. Tabloul de variație al funcției P este

t	0		15		∞
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$	0	$\nearrow$	$\left(\frac{15}{e}\right)^3$	$\searrow$	0

Așadar, după 15 secunde puterea respectivă va fi maximă.

b) Notăm $I = [10, 20]$. Atunci $\sup\limits_{t\in I} P(t) = P(15) = \left(\frac{15}{e}\right)^3$ și $\inf\limits_{t\in I} P(t) =$

$= \min(P(10), P(20)) = \min\left(\frac{10^3}{e^2}, \frac{20^3}{e^4}\right) = \frac{10^3}{e^2}$.

Așadar $\frac{10^3}{e^3} \leqslant P(t) \leqslant \frac{15^3}{e^3}$ pentru orice $t \in [10, 20]$.

Observație. În toate problemele precedente s-au cerut extremele unor funcții **date.** Pentru determinarea acestora s-a folosit teorema lui Fermat, împreună cu o parte din tabloul de variație (pentru precizarea extremelor).

Există situații unde în enunțul problemei nu apare explicit o funcție ale cărei extreme se cer determinate. În cele ce urmează, tocmai astfel de probleme vor fi analizate. Există aici o anumită libertate în alegerea variabilei și în exprimarea explicită a funcției care se cere extremată; de aceea este necesară obținerea unei oarecari îndemînări din partea rezolvitorului.

4) Putem da, în sfîrșit, *soluția completă la problema pusă la începutul acestui manual* (pagina 4). Anume, în condițiile indicate, am văzut că volumul cisternei era

$$V(x) = \frac{1}{6}(3Ax - 4\pi x^3), \quad x > 0,$$

A fiind o constantă pozitivă. Trebuie aflat maximul funcției V pe intervalul $(0, \infty)$.

Dar $V'(x) = \frac{1}{6}(3A - 12\pi x^2)$, deci ecuația $V'(x) = 0$, adică $4\pi x^2 = A$, are soluția $x_0 = \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$; apoi $V''(x_0) = -4\pi x_0 < 0$, deci x_0 este punct de maxim. În acest caz înălțimea cilindrului este $h = \frac{A - 4\pi x_0^2}{2\pi x_0} = 0$ și iată răspunsul la problema pusă: cisterna de forma considerată (fig. I.1) are volum maxim în cazul cînd ea este sferică (fără cilindru).

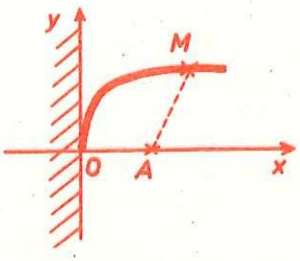


Fig. V.25

5) *Să se determine punctul de pe graficul funcției* $f(x) = 2\sqrt{x}$ *aflat la distanța minimă de punctul* $A(2, 0)$ (fig. V.25).

Soluție. Oricè punct de pe grafic are coordonatele $M(t, 2\sqrt{t})$, $t \geqslant 0$. Notăm cu $\varphi(t)$ distanța dintre punctele A și M, deci $\varphi(t) = \sqrt{(t-2)^2 + (2\sqrt{t} - 0)^2} =$ $= \sqrt{t^2 + 4}$ și minimul lui φ este atins pentru $t = 0$.

6) *Se consideră o emisferă de centru O și rază R. Dintre conurile circulare drepte circumscrise emisferei și având centrul bazei în O, să se determine conul de volum minim* (fig. V.26).

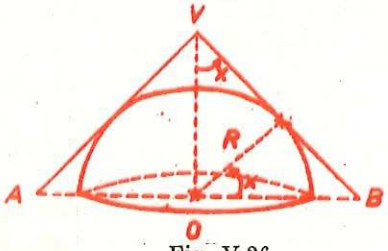


Fig. V.26

Soluție. Notăm cu $2x$ măsura unghiului $\widehat{AVB}$. Atunci $OV = \frac{R}{\sin x}$, $OB = \frac{R}{\cos x}$ și volumul conului va fi $W = \frac{\pi \cdot OB^2 \cdot OV}{3} = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$.

Condiția geometrică impune $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Determinăm minimul funcției $W(x) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x}$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Dar $W'(x) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \left(-\frac{\cos^3 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x}{\sin^2 x \cos^4 x}\right) = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{2\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$; ecuația $W'(x) = 0$ are soluțiile date de $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$, deci $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Se reține soluția $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $x_0 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$; în acest caz $W''(x_0) > 0$, deci x_0 este punct de minim.

7) *Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă de v km/h (cu condiția $40 \leqslant v \leqslant 70$), consumînd $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right)$ litri/h de benzină. Care este viteza optimă dacă șoferul este retribuit cu 15 lei/h, iar benzina costă 6 lei litrul?*

Soluție. Timpul total al parcursului este $\frac{100}{v}$ ore și consumul de benzină va fi $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right) \cdot \frac{100}{v} = \frac{v^2 + 2400}{3v}$ litri. Atunci costul pentru întregul parcurs va fi $C(v) = 15 \cdot \frac{100}{v} + 6 \cdot \frac{v^2 + 2400}{3v} = \frac{2v^2 + 6300}{v}$.

Viteza optimă este cea pentru care acest cost este minim.

Avem $C'(v) = \frac{2v^2 - 6300}{v^2}$, deci $v_{optim} = \sqrt{3150} = 15\sqrt{14} \simeq 56{,}125$ (km/h).

8) *Fie o dreaptă (D) care împarte un plan în două regiuni R_1, R_2* (figura V.27). *Fie A un punct fixat în regiunea R_1 și B un punct fixat în R_2. Ne propunem ca dintre toate punctele M situate pe (D) să determinăm pe cel pentru care expresia $\frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2}$ (v_1, v_2 fiind numere strict pozitive date) să fie minimă.* Alegem axele ca în figura V.27 și notăm cu x abscisa punctului M (am presupus $b \geqslant 0$). Atunci avem $OM = |x|$, $MB_1 = |b - x|$ și expresia dată este de forma

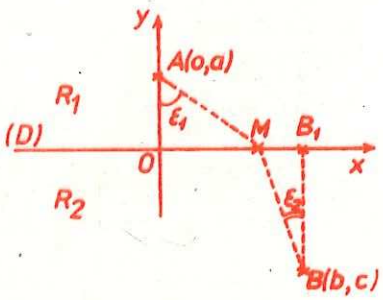


Fig. V.27

$$g(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b - x)^2 + c^2}}{v_2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Condiția necesară de minim pentru funcția g este $g'(x) = 0$, adică

$$(*) \quad \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{b - x}{v_2\sqrt{(b - x)^2 + c^2}} = 0,$$

de unde se află x. Un calcul ușor arată că în acest punct avem $g'(x) > 0$. Condiția (*) se scrie, în mod echivalent,

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{v_1} = \frac{\sin \varepsilon_2}{v_2}.$$

Acest exemplu a jucat un rol important din punct de vedere istoric și are o interpretare fizică remarcabilă.

Presupunem că R_1 și R_2 reprezintă două medii omogene și că lumina se propagă rectiliniu cu viteza v_1 în R_1, respectiv v_2 în R_2. Fie, ca mai sus, A un punct fixat în regiunea R_1 și B un punct fixat în regiunea R_2. Ne propunem să determinăm punctul M_0 situat pe (D) prin care trece o rază de lumină plecînd din A și care se propagă pînă în punctul B, știind că, în conformitate cu *principiul lui Fermat*, o rază de lumină se propagă pe acea traiectorie pe care o parcurge în timpul cel mai scurt. Timpul necesar luminii pentru a parcurge segmentul AM (respectiv MB) va fi $\frac{AM}{v_1}$ $\left(\text{respectiv } \frac{MB}{v_2}\right)$ și timpul minim necesar pentru a ajunge din A în B se determină ca mai sus. Notînd cu ε_1 (respectiv ε_2) unghiurile făcute de razele de lumină AM_0 (respectiv M_0B) cu normala la (D) în M_0 (fig. V.28),

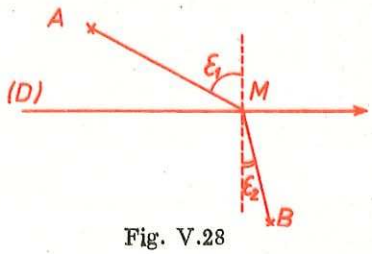


Fig. V.28

relația $\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{v_1}{v_2}$ demonstrată anterior este tocmai legea refracției, demonstrată deci pe baza principiului lui Fermat.

EXERCIȚII (capitolul V, § 4)

1. Să se afle $x > 0$ astfel încît suma $x + \frac{1}{x}$ să fie minimă.

2. Să se determine extremele absolute ale funcției $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ pe fiecare din intervalele $I_1 = [-2, 3]$, $I_2 = [0{,}9, 1{,}1]$, $I_3 = [1, \infty)$.

3. Costul fabricării pe zi a n unități dintr-un produs este $C(n) = 10\,000 + 30n - 0{,}001\,n^3$. Să se afle pentru ce n acest cost este maxim (presupunînd funcția $n \longmapsto C(n)$ prelungită prin formula precedentă la întreg intervalul $[1, \infty)$).

4. Fie $a > 0$ o constantă și $m, n \in \mathbb{N}$. Dacă x și y sînt strict pozitive și $x + y = a$; în ce caz produsul $x^m \cdot y^n$ este maxim?

5. Se consideră un semicerc de diametru $AB = 2R$. Dintre toate coardele PQ paralele cu diametrul AB să se determine cea pentru care aria trapezului $APQB$ este maximă.

6. Un bazin circular are raza 100 m și fie A, B două puncte diametral opuse. O persoană trebuie să ajungă din punctul A în punctul B, cu condiția să treacă printr-un punct P situat pe circumferință, mergînd înot pe coarda AP și apoi alergînd pe arcul PB. Presupunînd că persoana înoată cu 3 km/h și aleargă cu 12 km/h, să se afle între ce limite variază timpul în care persoana poate să ajungă din A în B.

7. Se consideră un con circular drept cu raza bazei R și înălțimea I. Să se înscrie în con un cilindru: a) avînd volumul maxim; b) avînd aria laterală maximă.

§ 5. Aplicații ale analizei matematice la studiul ecuațiilor

5.1. Rezolvarea grafică a unor ecuații

Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}$ sînt două funcții, a rezolva grafic ecuația $f(x) = g(x)$ revine la a determina abscisele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor f și g (fig. V.29).

În aplicarea acestei metode, se recomandă ca graficele să fie trasate cu cît mai mare precizie (pe hîrtie milimetrică, alegînd puncte suplimentare pe grafice etc.).

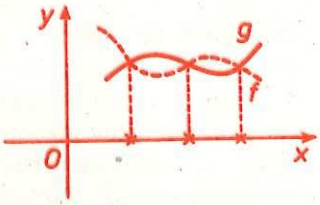


Fig. V.29

Să considerăm acum o ecuație de forma $m = \varphi(x)$, unde m este un parametru real și φ o funcție avînd graficul (C). A rezolva grafic această ecuație revine la a intersecta graficul (C) cu drepte $y = m$, $m \in \mathbb{R}$, paralele cu axa Ox. Pentru valorile lui m, pentru care nu există astfel de puncte de intersecție, ecuația $\varphi(x) = m$ nu admite soluții reale.

Exemple

1) Rezolvăm grafic ecuația $3^x - 3x = 0$. Ecuația se scrie $3^x = 3x$ și soluțiile ei sînt tocmai abscisele ξ și ξ' ale punctelor de intersecție ale graficelor $y = 3^x$, $y = 3x$ (fig. V.30).

2) Discutăm numărul de soluții reale ale ecuației $x^3 - mx^2 + 1 = 0$, după valorile parametrului real m. Deoarece $x = 0$ nu este soluție, ecuația se scrie echivalent $m = \frac{x^3 + 1}{x^2}$. Trasăm graficul funcției $\varphi(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$. Domeniul de definiție este $R \setminus \{0\}$, $x = 0$ este asimptotă verticală, iar $y = x$ este asimptotă oblică. Apoi $\varphi'(x) = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3 - 2}{x^3}$ și tabloul de variație este

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		∞
$\varphi'(x)$	$+$		$\|$	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ ∞	$\|$ ∞	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$\nearrow$	∞

Graficul lui φ este trasat în figura V.31.

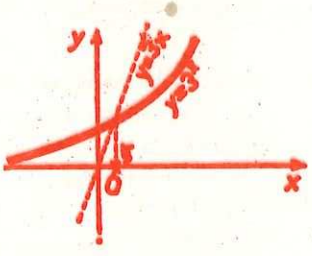


Fig. V.30

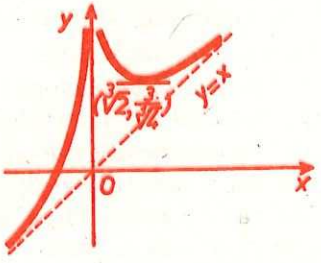


Fig. V.31

Dacă $m < \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci ecuația are o singură rădăcină reală (și negativă), deoarece în acest caz dreapta $y = m$ intersectează graficul într-un singur punct de abscisă $x_1 < 0$.

Dacă $m = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci $x_{2,3} = \sqrt[3]{2}$ este rădăcină dublă și ecuația are încă o rădăcină $x_1 < 0$.

Dacă $m > \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, atunci ecuația dată are trei rădăcini reale ($x_1 < 0$, $0 < x_2 < \sqrt[3]{2}$, $x_2 > \sqrt[3]{2}$)

5.2. Șirul lui Rolle

O aplicație utilă a teoremelor lui Rolle (IV.9) și Darboux (III.6) o constituie șirul lui Rolle asociat unei ecuații de forma $f(x) = 0$ cu f funcție derivabilă, cu ajutorul căruia se poate decide numărul rădăcinilor reale ale ecuației, indicîndu-se totodată intervalele unde se află aceste rădăcini. De fapt, cu ajutorul șirului lui Rolle căpătăm informații despre „liniile de nivel" ale lui f, adică mulțimile de puncte unde f ia valori fixate $\{x \mid f(x) = a\}$, $a \in \mathbf{R}$. Studiul lui f poate fi restrîns la un interval.

Stabilim mai întîi o consecință simplă a teoremei lui Rolle, anume:

TEOREMA V. 9. Fie $f : I \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe un interval I. Dacă $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ sînt două rădăcini consecutive ale lui f' (adică $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ și între x_1 și x_2 nu există alte rădăcini ale lui f'), atunci în intervalul (x_1, x_2) există cel mult o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$.

Demonstrație. Raționăm prin reducere la absurd. Dacă în intervalul (x_1, x_2) ar exista cel puțin două rădăcini $\xi < \eta$ ale ecuației $f(x) = 0$, atunci aplicînd teorema lui Rolle pentru intervalul $[\xi, \eta]$, ar rezulta că există $u \in (\xi, \eta)$ astfel încît $f'(u) = 0$. Atunci $x_1 < u < x_2$, și x_1, x_2 nu ar mai fi rădăcini consecutive ale lui f'.

Cu aceeași demonstrație se arată că dacă x_m (respectiv x_M) este cea mai mică (respectiv cea mai mare) rădăcină a lui f' în intervalul I, atunci la stînga lui x_m (respectiv la dreapta lui x_M) există cel mult o rădăcină a lui f.

Observație. Se mai spune pe scurt că zerourile derivatei separă zerourile funcției (termenii de rădăcină și zerou sînt aici sinonimi).

Facem ipoteza suplimentară că rădăcinile lui f' nu se acumulează în jurul vreunui punct din $\mathbf{R}$.

Etapele formării șirului lui Rolle

I. Se fixează intervalul de studiu I al ecuației $f(x) = 0$, funcția $f : I \to \mathbf{R}$ fiind presupusă derivabilă.

II. Se rezolvă ecuația $f'(x) = 0$ și se consideră rădăcinile reale ale acestei ecuații (situate în I), în ordine crescătoare $x_m < \ldots < x_1 < x_2 < \ldots < x_M$.

III. Se calculează valorile funcției f în aceste puncte, la care se adaugă limitele lui f, notate α și β, la capetele din stînga și respectiv din dreapta, ale intervalului I. Se obține un șir de valori asociat funcției f (sau echivalent, ecuației $f(x) = 0$), anume

$$\alpha,\ f(x_m),\ \ldots,\ f(x_1),\ f(x_2),\ \ldots,\ f(x_M),\ \beta.$$

IV. Datele anterioare pot fi organizate într-un tablou cu rubrici pentru x, $f'(x)$, $f(x)$. Şirul lui Rolle este şirul semnelor acestor valori (putînd apărea valoarea 0) în ordinea indicată la etapa a III-a. Concluzia rezultă astfel:

a) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate identice, de exemplu $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, atunci în intervalul (x_1, x_2) nu există rădăcini reale ale ecuaţiei $f(x) = 0$. Într-adevăr, două sau mai multe astfel de rădăcini nu pot exista conform teoremei V.9 (x_1, x_2 fiind zerouri consecutive ale lui f'). Iar dacă ar exista exact o rădăcină $\xi \in (x_1, x_2)$, atunci, cum $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, în mod necesar ξ este punct de extrem pentru f, adică $f'(\xi) = 0$, absurd.

b) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite, de exemplu $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, atunci, conform teoremei lui Darboux şi respectiv teoremei V.9, f are cel puţin (respectiv cel mult) o rădăcină în intervalul (x_1, x_2), deci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul (x_1, x_2).

c) Dacă în şirul lui Rolle apare 0 (de exemplu $f(x_k) = 0$, sau $f(x_{k+1}) = 0$), atunci x_k sau x_{k+1} este o rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi în intervalul (x_k, x_{k+1}) nu va exista altă rădăcină a acestei ecuaţii.

Prin *rădăcină multiplă* $x_0 \in \mathbb{R}$ a unei funcţii derivabile în x_0 înţelegem un număr x_0 astfel încît $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Dacă f este polinomială, aceasta revine la $f(x) \vdots (x - x_0)^2$.

În acest mod, numărînd schimbările de semn şi zerourile se determină numărul de rădăcini reale (fără a determina ordinele de multiplicitate ale acestora) ale ecuaţiei considerate şi, totodată, intervale în care aceste rădăcini sînt situate.

Exemple

1) Determinăm numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x^3 + 3x^2 - 9 = 0$. Parcurgem sistematic etapele anterioare.

I. Intervalul de studiu este $I = (-\infty, \infty)$; notăm $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9$.

II. Ecuaţia $f'(x) = 0$ este $3x^2 + 6x = 0$ şi are rădăcinile $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

III. $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 3x^2 - 9) = -\infty$, $f(-2) = -8 + 12 - 9 = -5$, $f(0) = -9$, $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

IV. Considerăm tabloul

x	$-\infty$	-2	0	∞
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-5	-9	∞

Şirul lui Rolle este şirul semnelor valorilor cuprinse în ultima rubrică, anume $-, -, -, +$. Există o singură schimbare de semn, deci ecuaţia iniţială are o singură rădăcină reală, situată în intervalul $(0, \infty)$. Acest interval corespunde în prima rubrică schimbării de semn din şirul lui Rolle.

2) Ne propunem să determinăm numărul de rădăcini reale ale ecuației $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1 = 0$. Notînd $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 - 40x + 1$, $I = \mathbb{R}$, avem $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 30x^2 + 20x - 40 = 10(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 4) = 10[x^4 - x^2 - 2(x^3 - x) + 4(x^2 - 1)] = 10[x^2(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1)] = 10(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 4)$, $\forall x \in I$. Rădăcinile reale ale ecuației $f'(x) = 0$ sînt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Tabloul asociat este următorul:

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$		$f(-1) = 34 > 0$		$f(1) = -22 < 0$		∞

iar șirul lui Rolle este $-, +, -, +$. Așadar, ecuația considerată are trei rădăcini reale, situate respectiv în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$.

3) Considerăm acum ecuația $x^2 - 2 \ln x + m = 0$, unde m este un parametru real. În acest caz, luăm $I = (0, \infty)$ și notăm $f(x) = x^2 - 2 \ln x + m$. Ecuația $f'(x) = 0$, adică $2x - \frac{2}{x} = 0$, are în I soluția $x = 1$. Deoarece $\alpha = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x^2 - 2 \ln x + m) = 0 - 2 \ln 0 + m = \infty$ și $\beta = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(1 + \frac{m - 2 \ln x}{x^3}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$, tabloul asociat este:

x	0		1		∞
$f'(x)$			0		
$f(x)$	∞		$m + 1$		∞

Dacă $m + 1 > 0$, atunci șirul lui Rolle este $(+, +, +)$ și nu există nici o schimbare de semn, deci ecuația nu are soluții reale. Dacă $m = -1$ șirul lui Rolle este $(+, 0, +)$, deci $x = 1$ este rădăcină multiplă, iar dacă $m < -1$, atunci șirul lui Rolle este $+, -, +$ și, ca atare, ecuația are două rădăcini reale, situate în intervalele $(0, 1)$ și respectiv $(1, \infty)$.

Observație. Metoda șirului lui Rolle se bazează pe posibilitatea rezolvării efective a ecuației $f'(x) = 0$, ceea ce limitează aplicarea ei. De asemenea, metoda grafică are și ea anumite limite de aplicabilitate și nu se pot da indicații generale asupra utilizării uneia sau alteia din cele două metode. Numai prin exercițiu veți putea căpăta singuri priceperea de a decide care metodă trebuie aplicată de la caz la caz.

5.3. Obținerea unor inegalități

Rezultatele teoretice ale analizei permit obținerea unor inegalități care cu ajutorul metodelor elementare ar fi fost greu de probat. Demonstrăm mai întîi un rezultat general.

TEOREMA V.10. Dacă f și g sînt funcții derivabile pe un interval $I = [x_0, \infty)$ astfel încît $f(x_0) = g(x_0)$ și $f'(x) \geqslant g'(x)$ pentru orice $x \in I$, atunci $f(x) \geqslant g(x)$, pentru orice $x \in I$ (rezultate similare au loc și pentru alte tipuri de intervale).

Demonstrație. Intuitiv situația este destul de clară: graficele lui f și g pornesc din același punct, iar coeficientul unghiular al tangentei în graficul lui f este mai mare și, ca atare, $f \geqslant g$. Este însă necesar un raționament. Notăm $h = f - g$. Așadar, $h(x_0) = 0$, $h'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \geqslant x_0$. Atunci funcția h este monoton crescătoare pe intervalul I (conform teoremei V.2) și, în particular, $h(x) \geqslant h(x_0) = 0$ pentru orice $x \geqslant x_0$, deci $f(x) \geqslant g(x)$ pentru orice $x \geqslant x_0$.

Exemple

1) Arătăm că pentru orice $x \geqslant 0$ au loc inegalitățile

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Notăm $f(x) = x$, $g(x) = \ln(1+x)$, $h(x) = \frac{x}{1+x}$, $\forall\, x \in I$, unde $I = [0, \infty)$. Avem $f(0) = 0$, $g(0) = 0$, $h(0) = 0$, $f'(x) = 1$, $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, $h'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$, $\forall\, x \in I$ și este evident că $f'(x) \geqslant g'(x) \geqslant h'(x)$, $\forall\, x \in I$. Atunci, conform teoremei V.10, rezultă că $f(x) \geqslant g(x) \geqslant h(x)$, $\forall\, x \in I$.

2) Arătăm că pentru orice $x \geqslant 0$ avem $x - \frac{x^3}{3} \leqslant \operatorname{arctg} x$. Notăm $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $g(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Atunci $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $g'(x) = 1 - x^2$. Deoarece $f''(x) \geqslant g''(x)$, $\forall x \geqslant 0$ și $f'(0) = g'(0)$, rezultă că $f'(x) \geqslant g'(x)$; aplicînd încă o dată teorema V.10, rezultă că $f(x) \geqslant g(x)$, $\forall\, x \geqslant 0$.

Demonstrăm acum o inegalitate importantă.

TEOREMA V.11 *(inegalitatea lui O. Hölder, 1859–1937).* **Dacă**

$$a_1, \ldots, a_n \geqslant 0;\ b_1, \ldots, b_n \geqslant 0;\ p > 1,\ q > 1 \text{ și } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ atunci}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{8}$$

Demonstrație. Să considerăm funcția $\varphi(x) = x^\alpha - \alpha x$, $x > 0$, unde $\alpha \in (0, 1)$ este un parametru. Din tabloul de variație a lui φ

x	0		1		∞
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$1-\alpha$	$\searrow$	$-\infty$

rezultă că $\varphi(x) \leqslant 1 - \alpha$, adică $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$ pentru orice $x > 0$. Atunci pentru orice $A > 0$, $B > 0$, punînd $x = \frac{A}{B}$ și $\alpha = \frac{1}{p}$, rezultă că $1 - \alpha = 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, deci $\left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\left(\frac{A}{B}\right) \leqslant \frac{1}{q}$, de unde $A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$.

Punînd aici $A = \dfrac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}$, $B = \dfrac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$ și adunînd inegalitățile astfel obținute, rezultă

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

și inegalitatea (2) este probată.

Pentru $p = 2$, $q = 2$ se obține o inegalitate care joacă un rol important în matematică (și care de altfel se poate demonstra direct), anume: $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$ *(inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz)*.

EXERCIȚII (capitolul V, § 5)

1. Să se rezolve grafic (cu aproximație) ecuațiile:

a) $2^x + x - 1 = 0$;
b) $2^x - 2x = 0$;
c) $2^x - 3x + 2 = 0$;
d) $\sin x + 2x - 1 = 0$;
e) $\ln x + x - 1 = 0$;
f) $\sin x - x = 0$.

2. Să se arate că ecuația $x = 2(1 - \cos x)$ are 3 soluții reale.

3. Să se discute, după valorile parametrului real m numărul soluțiilor reale ale ecuațiilor:

a) $m = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;
b) $m = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$;
c) $m = 2^x - x \ln 2$;
d) $x^2 + x - m \cdot |x| = 0$;
e) $\sin x + m \cos x = 0$;
f) $m = e^x - x$.

4. Folosind metoda șirului lui Rolle să se discute numărul de soluții reale ale ecuațiilor următoare după valorile parametrului real m:

a) $x^2 + 2x + m = 0$;
b) $x^3 + 3x + m = 0$;
c) $x^3 + 3x^2 + m = 0$;
d) $2 \ln x + x^2 - 4x + m = 0$;
e) $x^4 - 4x^3 + m = 0$;
f) $\operatorname{ch} x + m = 0$.

5. Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației:

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 - 1 = 0.$$

6. Să se determine numărul de soluții reale ale ecuațiilor:

a) $2 \sin x = x$;
b) $5 \sin x = x$;
e) $e^x = 1 + x$;
d) $\ln x = x - 1$.

7*. a) Să se arate, folosind șirul lui Rolle, că ecuația $x^n + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$) are cel mult două soluții reale, dacă n este par, și cel mult trei, dacă n este impar;

b) Să se arate că ecuația $x^{p+q} - A(x^p - 1) = 0$ ($p, q \in \mathbf{N}$ impare, $A > 0$) are două rădăcini reale și pozitive dacă $p^p \cdot q^q \cdot A^p < (p + q)^{p+q}$.

8. Fie $a, b > 0$ și $\varphi : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $\varphi(x) = x + a + b - 3\sqrt[3]{abx}$. Să se arate că $\varphi(x) \geqslant 0$ pentru $x > 0$ și să se deducă apoi că media aritmetică a trei numere reale pozitive este mai mare decît media lor geometrică. Generalizare.

9. Să se arate că

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ pentru orice } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

10. a) Să se arate că ecuația $e^x = ax$ are cel puțin o soluție, pentru orice $a \in (-\infty, 0) \cup [e, \infty)$.

b) Să se discute numărul de soluții reale ale ecuației $e^x = ax^2$ după valorile parametrului real a.

11. Să se arate că:

a) $e^x \geqslant x^e$, pentru orice $x > 0$;

b) $x^\alpha \cdot |\ln x| \leqslant \frac{1}{\alpha e}$ (dacă $0 < x < 1$ și $\alpha > 0$);

c) $e^x \geqslant 1 + \ln(1 + x)$, pentru orice $x > -1$;

d) $\frac{\ln x}{x - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$.

§ 6. Aplicații ale analizei matematice în cinematică

6.1. Noțiunea de curbă

După cum am văzut, pentru orice funcție elementară se poate reprezenta graficul ei (relativ la un sistem ortogonal de axe). În vorbirea curentă un astfel de grafic este numit curbă. Dar definiția riguroasă, într-un cadru mai general, a noțiunii de curbă ridică dificultăți.

Începem cu următorul exemplu:

Să considerăm cercul (C) cu centrul în originea axelor cu raza 1, avînd deci ecuația $x^2 + y^2 = 1$ (fig. V.32).

Așadar, $(C) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Mulțimea (C) nu este graficul vreunei funcții reale; ea poate fi reprezentată ca reuniunea graficelor funcțiilor $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ și $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Așadar, deși cercul este o entitate geometrică bine definită, pentru a-l încadra în teoria anterioară, trebuie considerate două funcții ale căror grafice se racordează în punctele $x = -1$ și $x = 1$. Un alt dezavantaj al reprezentării explicite ($y = \pm\sqrt{1 - x^2}$) a cercului este acela că inițial variabilele x și y au rol simetric și acesta este deteriorat prin explicitarea uneia din variabile, mai ales că funcțiile f_1, f_2 sînt nederivabile în punctele $x = -1$, $x = 1$. Se pune atunci întrebarea: nu există alt mod de a reprezenta curbele (cercul în cazul de față)?

Să considerăm intervalul $I = [0, 2\pi)$. Pentru orice punct $M(x, y)$ situat pe cercul (C) există și este unic $t \in I$ astfel încît $x = \cos t$, $y = \sin t$ (t este unghiul măsurat în radiani dintre versorul $\vec{i}$ al axei Ox și vectorul $\overrightarrow{OM}$; v. fig. V. 32). Se mai scrie

$$(C) \begin{cases} x = \cos t \\ x = \sin t \end{cases}, \quad t \in I$$

și se mai spune că este indicată o reprezentare parametrică a cercului (C) (o altă reprezentare parametrică a cercului (C) este:

$$x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \; y = \frac{2u}{1 + u^2}, \; u \in \mathbf{R},$$

obținută din cea anterioară punînd $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = u$; evident,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)^2 + \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2 = 1, \; \forall u \in \mathbf{R}).$$

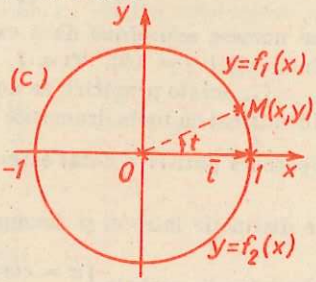


Fig. V.32

Pentru o elipsă (E) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $(a > 0,\ b > 0)$, se poate indica reprezentarea parametrică:

$$(E)\ \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases},\ t \in [0,\ 2\pi).$$

Această discuție sugerează următoarea definiție: se numește *drum parametrizat plan* orice aplicație

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2,\ t \longmapsto (x(t),\ y(t)) \tag{9}$$

astfel încît funcțiile $x(t)$, $y(t)$ să fie continue pe I. Se mai spune că drumul parametrizat γ are reprezentarea parametrică

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in I.$$

Această definiție este foarte generală și a condus la exemple ciudate de drumuri parametrizate (de exemplu, curba lui G. Peano, 1858—1932, care trece prin toate punctele unui pătrat), care contrazic intuiția noastră asupra noțiunii de curbă. În aplicațiile analizei este util de presupus că funcțiile $x(t)$, $y(t)$ sînt de două ori derivabile pe I. Această ipoteză face ca fenomene precum cel relevat de curba lui Peano să fie eliminate.

Submulțimea (γ) a lui $\mathbf{R}^2$ a tuturor punctelor $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ cînd t parcurge intervalul I, se numește *imaginea* drumului γ. Așadar,

$$(\gamma) = \{(x(t),\ y(t)) \mid t \in I\}.$$

Trebuie făcută distincția între un drum γ și imaginea (γ) a lui. De ce? Să considerăm pentru orice întreg $n \geqslant 1$ drumul $\gamma_n : [0,\ 2\pi) \to \mathbf{R}^2$, $\gamma_n(t) = (\cos nt,\ \sin nt)$, numit *cercul unitate parcurs de n ori în sens pozitiv*. Este evident că $(\gamma_n) = \{x^2 + y^2 = 1\} = (C)$ pentru orice n, dar γ_2 și γ_3, de exemplu, sînt drumuri distincte. Iată și un argument euristic. Să ne închipuim un mobil care se mișcă într-un plan raportat la un sistem ortogonal de axe xOy. Atunci, la fiecare moment t coordonatele poziției mobilului $x(t)$, $y(t)$ depind de t și mobilul descrie o anumită traiectorie. El poate reveni acolo de unde a plecat, poate să repete parcursul de mai multe ori etc. Putem să ne imaginăm un al doilea mobil care trece prin aceleași puncte cu primul, dar avînd viteză diferită sau alt sens de parcurs. Deși mulțimile de puncte ocupate de cele două mobile sînt aceleași, nu putem spune că drumurile corespunzătoare sînt aceleași. Este însă natural să considerăm că dacă traiectoriile coincid ca mulțimi de puncte, sînt parcurse în același sens, diferind doar prin viteza cu care sînt parcurse, atunci drumurile celor două mobile sînt echivalente. Definiția precisă este următoarea:

Două drumuri parametrizate $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$, $\lambda : J \to \mathbf{R}^2$

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in I;\ \lambda : \begin{cases} x = x(u) \\ y = y(u) \end{cases},\ u \in J$$

se numesc *echivalente* dacă există o funcție $\theta : I \to J$ bijectivă, strict crescătoare, astfel încît $\lambda(\theta\ (t)) = \lambda(t)$, $\forall t \in I$.

Cu aceste pregătiri, se numește *curbă plană parametrizată*, orice drum parametrizat, identificat cu toate drumurile echivalente cu el. De exemplu, semicercul superior unitate (parcurs pozitiv o dată) este drumul parametrizat $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0,\ \pi]$ și nu se face nici o distincție între el și drumurile $\begin{cases} x = \cos 2u \\ y = \sin 2u \end{cases}$, $u \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\begin{cases} x = -v \\ y = \sqrt{1 - v^2} \end{cases}$, $v \in [-1,\ 1]$.

În schimb, curbele $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$, $t \in [0,\ 2\pi]$, $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $t \in [0,\ 2\pi)$ sînt distincte.

Vedeți, așadar, cîte precauții au fost luate pentru a defini o noțiune simplă intuitivă.

Pentru a rezuma discuția anterioară, curbele plane pot fi reprezentate:

a) prin ecuație carteziană de forma $F(x, y) = 0$;

b) ca grafice de ecuație $y = f(x)$ sau $x = g(y)$;

c) parametric $\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in I$.

În cadrul geometriei diferențiale se analizează mai adînc legătura între aceste moduri de reprezentare și se extinde conceptul de curbă (considerîndu-se curbe în spațiul $\mathbf{R}^2$, suprafețe în $\mathbf{R}^3$ și, mai general, varietăți multidimensionale).

6.2. Cîteva noțiuni de cinematică

Cinematica este în esență studiul matematic al mișcării în timp a mobilelor. Studiem aici mișcări într-un plan (raportat la un sistem ortogonal de axe xOy de versori $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Presupunem că la fiecare moment t, dintr-un interval de studiu I, un mobil M se află în punctul de coordonate $(x(t), y(t))$ astfel încît funcțiile $x(t)$, $y(t)$ să fie de două ori derivabile în I. Este astfel definit în mod firesc un drum parametrizat.

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad \forall\, t \in I.$$

Imaginea ei (γ) se numește *traiectoria mobilului*.

Notînd $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$, vectorul de poziție al lui $\vec{M}$, avem

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad \forall\, t \in I.$$

Se numește *vector-viteză* (respectiv *vector-accelerație*) al mobilului la un moment $t_0 \in I$

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} \text{ (respectiv } \vec{r}''(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}\,).$$

Numărul real și pozitiv $v(t_0) = \| \vec{r}'(t_0) \| = \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}$ se numește viteza la momentul t_0 a mobilului M pe traiectoria (γ). Dacă $x'(t_0) = 0$ și $y'(t_0) = 0$, se mai spune că punctul corespunzător pe traiectorie este *singular*; în acest caz viteza $v(t_0)$ este nulă. Într-un punct nesingular, vectorul $\vec{r}'(t_0)$ are următoarea interpretare geometrică: deoarece

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \quad y'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},$$

rezultă că

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} = \lim_{t \to t_0} \frac{[x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}] - [x(t_0)\vec{i} + y(t_0)\vec{j}]}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{t - t_0}, \text{ deci } \vec{r}'(t_0) \text{ este coliniar cu limita vectorului } \overrightarrow{M_0M},$$

adică $\vec{r}'(t_0)$ *este tangent la* (γ) *în punctul* M_0 (fig. V.33).

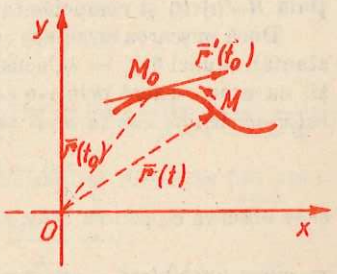


Fig. V.33

Am definit deja noțiunile de viteză, accelerație în cazul unei mișcări rectilinii (pe o axă) a mobilelor și acum am extins aceste noțiuni la cazul mișcării plane.

Exemple

1) Presupunem că un mobil are la fiecare moment $t \in [0, 2]$ coordonatele $x = 2t$, $y = t^2 - t$ și ne propunem să figurăm traiectoria mobilului, să calculăm vectorul-viteză și să determinăm în ce moment viteza mobilului este minimă.

Aşadar, $x \in [0, 4]$ şi $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Traiectoria mobilului va fi o porţiune din parabola $y = \frac{x^2 - 2x}{4}$. Vectorul de poziţie al punctului M la momentul t este

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (t^2 - t)\vec{j}, \text{ deci}$$

vectorul viteză va fi $\vec{r}'(t) = 2\vec{i} + (2t - 1)\vec{j}$. Mărimea lui este $v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4 + (2t - 1)^2}$ şi viteza minimă este atinsă la momentul $t = \frac{1}{2}$.

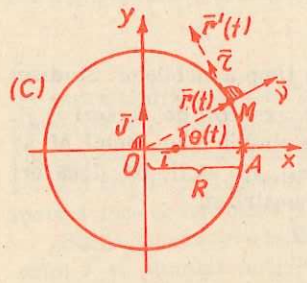


Fig. V.34

2) *Mişcarea circulară.* Se spune că un mobil are o *mişcare circulară* dacă traiectoria sa este un cerc (C) sau o submulţime a acestuia. Fie O centrul şi R raza cercului (C). Fixăm un punct A pe cerc şi alegem sistemul ortogonal de axe xOy (fig. V.34). La fiecare moment t mobilul se află într-un punct M: notînd cu $\theta(t) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ măsurat, în radiani, măsura arcului $\overset{\frown}{AM}$ va fi egală cu $s(t) = R \cdot \theta(t)$. Coordonatele lui M vor fi $x = R\cos\theta(t)$, $y = R\sin\theta(t)$ şi $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, deci

$$\vec{r}(t) = R\cos\theta(t)\vec{i} + R\sin\theta(t)\vec{j}.$$

În acest caz, vectorul-viteză $\vec{r}'(t) = [-R\sin\theta(t)\vec{i} + R\cos\theta(t)\vec{j}]\theta'(t)$ este tangent în M la (C) şi mărimea vitezei este $v(t) = \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2\theta \cdot \theta'^2 + R^2\cos^2\theta \cdot \theta'^2} = R \cdot |\theta'(t)|$.

$\omega(t) = \theta'(t) = \frac{d\theta}{dt}$ se numeşte *viteza unghiulară* a mobilului la momentul t.

Se observă că notînd cu $\vec{\nu}$ (respectiv cu $\vec{\tau}$) versorul lui $\vec{r}(t)$ (respectiv $\vec{r}'(t)$), avem

$$\vec{\nu} = \frac{\vec{r}(t)}{R} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \quad \vec{\tau} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

(numite versorul-normală şi versorul-tangentă la (C) la momentul t) şi rezultă $\vec{r}(t) = R\cdot\vec{\nu}$, $\vec{r}'(t) = R\omega(t)\cdot\vec{\tau}$ (fig. V.34).

Deci $\vec{r}''(t) = R\omega'(t)\cdot\vec{\tau}(t) + R\omega(t)\vec{\tau}'(t) = R\omega'(t)\vec{\tau}(t) - R\omega^2(t)\,\vec{\nu}(t)$, deoarece $\vec{\tau}'(t) = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})' = -\cos\theta\cdot\theta'\vec{i} - \sin\theta\cdot\theta'\vec{j} = -\omega\cdot\vec{\nu}$.

Am descompus astfel vectorul-acceleraţie $\vec{r}''(t)$ al mişcării în componenta sa tangenţială $R\omega'(t)\vec{\tau}(t)$ şi componenta sa normală $-R\omega^2(t)\vec{\nu}(t)$.

Dacă mişcarea circulară considerată este *uniformă* (adică viteza unghiulară este constantă), atunci $\theta'(t) = \omega$, constant ($\omega'(t) = 0$), deci funcţiile $\theta(t)$ şi ωt au aceeaşi derivată şi, ca atare, diferă printr-o constantă, $\theta(t) = \omega t + \theta_0$. *Componenta tangenţială a vectorului-acceleraţie este în acest caz nulă*; de asemenea,

$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t + \theta_0)\vec{i} + R\sin(\omega t + \theta_0)\vec{j}$$

şi se observă că pentru orice t avem $\vec{r}(t) = \vec{r}\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$, adică *o mişcare circulară uniformă cu viteza unghiulară ω este periodică de perioadă* $\frac{2\pi}{\omega}$.

EXERCIŢII (capitolul V, § 6)

1. Să se reprezinte grafic imaginea următoarelor drumuri parametrizate $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$:

a) $x = t$, $y = t$, $I = [0, 2]$;
b) $x = t$, $y = t^2$, $I = [-1, 1]$;
c) $x = t^2$, $y = t$, $I = [0, 1]$;
d) $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $I = [0, \pi]$;
e) $x = \cos t$, $y = \cos 2t$, $I = [0, 2\pi]$;
f) $x = |\cos t|$, $y = \sin t$, $I = [0, 2\pi]$.

2. Considerăm drumurile parametrizate $\gamma, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$, definite prin $\gamma(t) = (t, 2t)$, $\gamma_1(t) = (4t - 4t^2, 8t - 8t^2)$.

a) Să se arate că ele au aceeaşi imagine, anume segmentul de dreaptă $y = 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

b) Să se figureze punctele $\gamma(t)$, $\gamma_1(t)$, pentru valorile $t = 0$, $t = \frac{1}{4}$, $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$, $t = \frac{3}{4}$, $t = 1$ şi apoi să se arate că drumurile γ şi γ_1 nu sînt echivalente.

3. Presupunem că la fiecare moment $t \geqslant 0$ un mobil se află în punctul de coordonate $x = t + 2$, $y = \frac{1}{t^2 + 4t + 3}$. Să se arate că traiectoria lui aparţine curbei $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ şi să se determine la fiecare moment t vectorul-acceleraţie.

4. Să se reprezinte traiectoria unui mobil care la fiecare moment $t \in [0, 2\pi]$ se află în punctul de coordonate $x = \sin t$, $y = -2 - \cos 2t$ şi să se calculeze norma (mărimea) vectorului-viteză şi a vectorului-acceleraţie la momentul $t = \frac{3}{4}$.

EXERCIŢII ŞI PROBLEME REZOLVATE LA CAPITOLUL V

1. *Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă. Să se arate că:*

a) *dacă f este pară (respectiv impară), atunci f' este impară (respectiv pară). Dar reciproc?*

b) *dacă f este periodică de perioadă T, atunci f' este periodică şi are aceeaşi perioadă. Dar reciproc?*

Soluţie. a) Derivăm relaţia $f(-x) = f(x)$. Obţinem $-f'(-x) = f'(x)$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$. b) Derivăm relaţia $f(x + T) = f(x)$. Obţinem $f'(x + T) = f(x)$ pentru $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Reciproca nu este adevărată; de exemplu, funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \sin x$ nu este periodică, dar derivata ei f' este periodică.

2. Să se calculeze următoarele limite:

$$l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x + \sin x}, \quad l_2 = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x + \sin x}, \quad l_3 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right),$$

$$l_4 = \lim_{x \to 0,\, x > 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} \text{ şi } l_5 = \lim_{x \to 0,\, x < 0} (1 - 4^x)^x.$$

Soluţie. Folosind regula lui l'Hospital (pentru cazul $\frac{0}{0}$) se obţine $l_1 = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$. Limita l_2 nu se poate calcula folosind regula lui l'Hospital (deoarece $\lim_{x \to \infty} \cos x$ nu există); totuşi $l_2 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1$, deoarece $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Limita l_3 este de tipul $\infty-\infty$. Avem $l_3 = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{-\sin x} = 0.$

Limita l_4 este de tipul 1^∞ $\left(\text{deoarece } \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1 \text{ și } \dfrac{1}{\sin x} \to \infty \text{ pentru } x\to 0\right)$. Avem $\ln l_4 =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln x}{\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{x}}{\cos x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{x - \sin x\cos x}{x\sin x\cos^2 x} = \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{x - \sin x\cos x}{x\sin x} \left(\text{deoarece } \lim_{x\to 0} \cos x = 1\right).$$

Aplicînd încă o dată regula lui l'Hospital, rezultă $\ln l_4 = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \dfrac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x + x\cos x} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{2\sin^2 x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{\substack{x\to 0,\\ x>0}} \frac{2\sin x}{1 + \dfrac{x}{\sin x}\cos x} = 0, \text{ deci } l_4 = 1.$$

În sfîrșit, l_5 este de tipul 0° și $\ln l_5 = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} x\ln(1 - 4^x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \dfrac{\ln(1-4^x)}{\dfrac{1}{x}} =$

$$= \lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \frac{\dfrac{1}{1-4^x}(-4^x\ln 4)}{-\dfrac{1}{x^2}} = (\ln 4)\lim_{\substack{x\to 0;\\ x<0}} \frac{x^2}{1-4^x} = (\ln 4)\cdot \lim_{\substack{x\to 0,\\ x<0}} \frac{2x}{-4^x\ln 4} = 0,$$

deci $l_5 = 1$.

3. *Fie* $f:[0, a]\to\mathbf{R}$, $a > 0$, *o funcție derivabilă cu* f' *continuă și astfel ca* $f(0) = 0$. *Să se arate că dacă există* $M > 0$ *astfel încît* $f'(x) \geqslant M$ *pentru orice* $x \in [0, a)$, *atunci* $f(x) \geqslant \dfrac{Ma}{2}$ *pentru orice* $x \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right]$.

Soluție. Considerăm funcția $\varphi(x) = f(x) - Mx$. Avem $\varphi(0) = 0$ și $\varphi'(x) = f'(x) - M \geqslant 0$, deci φ este crescătoare pe intervalul $[0, a]$. Așadar, $\varphi(x) \geqslant 0$, adică $f(x) \geqslant Mx$ pentru orice $x \in [0, a]$. Dacă $x \in \left[\dfrac{a}{2}, a\right]$ avem $x \geqslant \dfrac{a}{2}$, deci $f(x) \geqslant f\left(\dfrac{a}{2}\right) \geqslant \dfrac{Ma}{2}$.

4. Dacă $f:(-a, a)\to\mathbf{R}$ $(a > 0)$ *este o funcție derivabilă, cu* f' *continuă,* $f(0) = 1$ *și* $f(x) > 0$ *pentru orice* $x \in (-a, a)$, *să se arate că*

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{f'(0)}.$$

Soluție. Avem de arătat că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln f(x)}{x} = f'(0)$, adică, folosind regula lui l'Hospital, $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, ceea ce este evident, deoarece $f(0) = 1$.

Observație. Pentru o limită $\lim u^v$ de tipul 1^∞, scriind $u^v = \left[(1 + u - 1)^{\frac{1}{u-1}}\right]^{v(u-1)}$, rezultă că $\lim u^v = e^{\lim v(u-1)}$, dacă există limita de la exponent. În cazul acestui exercițiu,

$$\lim_{x\to 0} f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(f(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}} = e^{f'(0)}.$$

5. *Să se arate că dacă funcția* $f : I \to \mathbf{R}$ *este convexă pe un interval* $I \subset \mathbf{R}$, *atunci pentru orice* $x_1, \ldots, x_n \in I$, avem

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + \ldots + f(x_n)] \text{ (inegalitatea lui Jensen).}$$

Soluție. Procedăm prin inducție după n. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă; presupunem $n \geqslant 2$ și afirmația adevărată pentru orice $k \leqslant n - 1$ numere. Atunci, $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n}x_n\right)$ și cum f este convexă, rezultă $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}\right) + \frac{1}{n} f(x_n) \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-1}[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + \frac{1}{n} f(x_n)$, folosind ipoteza de inducție.

Așadar, $f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}$.

Pentru funcțiile concave avem inegalitatea inversă.

Observație. Se poate arăta, mai general, că dacă $f : I \to \mathbf{R}$, I fiind un interval din $\mathbf{R}$, funcția este convexă, atunci pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in I$ și pentru orice $t_1, \ldots, t_n > 0$ astfel încît $t_1 + \ldots + t_n = 1$, avem $f(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \ldots + t_nf(x_n)$. Pentru $t_1 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$ se obține inegalitatea din enunț.

6. *Să se arate că:*

1) *dacă* $0 < b < a$, *atunci* $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$;

2) *dacă* $0 \leqslant a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$, *atunci* $(b - a)\cos b \leqslant \sin b < \sin a \leqslant (b - a)\cos a$.

Soluție. 1) Considerăm funcția $f(x) = \ln x$ pe intervalul $[b, a]$ și aplicăm formula creșterilor finite; atunci $f(a) - f(b) = (a - b) \cdot f'(c)$, deci $\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} = f'(c)$, unde $b < c < a$. Dar $f'(c) = \frac{1}{c}$ și deci $\frac{1}{a} < f'(c) < \frac{1}{b}$; ca atare, $\frac{1}{a} < \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} < \frac{1}{b}$.

2) Dacă $a = b$, inegalitățile sînt evidente și putem presupune $a < b$, inegalitățile rezultă aplicînd teorema creșterilor finite funcției sin: $[a, b] \to \mathbf{R}$ (ținînd cont că pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția cos este descrescătoare).

PROBLEME RECAPITULATIVE

I

1. Să se arate că funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$ nu este polinomială.

2. Se consideră șirurile

$$a_n = \frac{2n + (-1)^n \cdot n}{2n + 1}, \qquad b_n = \frac{2n + (-1)^{n+1} \cdot n}{2n + 1}, \; n \in \mathbf{N}.$$

Să se arate că $|a_n - b_n| \leqslant 1$ pentru orice $n \geqslant 1$ și să se determine valorile lui n astfel încît $|a_n + b_n - 2| < \frac{1}{101}$.

3*. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, 0 < m < n \text{ cu } m, n \text{ întregi} \right\}$. Să se arate că A nu are un cel mai mic element și nici un cel mai mare element și să se determine $\inf A$, $\sup A$.

4*. Să se traseze graficele funcțiilor $\varphi, \psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite prin $\varphi(x) = \inf\limits_{t \leqslant x} t^2$ și $\psi(x) = \sup\limits_{t \in [x,\, x+1]} (t^2 - t)$.

5*. Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție mărginită. Să se arate că pentru orice întreg $n \geqslant 1$ există funcții polinomiale P, Q de grad n astfel încît $P(x) \leqslant f(x) \leqslant Q(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

II

6. Fie $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$ și $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \geqslant 1)$. Să se arate că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ și $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = 1$.

7. Dacă $(x_n)_{n \geqslant 0}$ și $(y_n)_{n \geqslant 0}$ sînt șiruri de numere reale convergente către a și respectiv b, $a \neq b$, ce se poate spune despre convergența șirului $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, \ldots$? Dar dacă $a = b$?

8. a) Fie $a_{n+1} = \frac{5a_n + 3}{a_n + 3}$, $n \geqslant 1$, $a_1 > 0$. Să se arate că șirul $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$, $n \geqslant 1$ este o progresie geometrică și să se studieze convergența șirurilor (a_n), (b_n).

b) Fie $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} - 4$, $\forall\, n \geqslant 1$ și $a_0 = 3$. Să se arate că diferența $a_n - a_{n-1}$ are semn constant pentru orice n și că șirul $b_n = a_n + 6$, $n \geqslant 0$ este o progresie geometrică convergentă către zero.

9. a) Să se determine constanta α astfel încît limita $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$ să existe și să fie finită.

b) Să se arate că dacă $a+b+1=0$, atunci $\lim_{n\to\infty}(a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}+$ $+\sqrt{n+3})=0$ și $\lim_{n\to\infty}[a\ln(3+n)+b\ln(2+n)+\ln(1+n)]=0$.

10. Un segment AB de lungime a este împărțit în n segmente de lungimi egale $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}B$ și pe fiecare din aceste segmente se construiește, de aceeași parte, cîte un triunghi echilateral cu vîrfurile $C_1, C_2, \ldots, C_n$ respectiv. Să se calculeze $\lim_{n\to\infty}(AC_1 +$ $+ C_1A_1 + A_1C_2 + \ldots + A_{n-1}C_n + C_nB)$ și să se explice rezultatul, aparent paradoxal, obținut.

11. Fie $f, g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, \text{ dacă } x\neq 0\\ 1, \text{ dacă } x=0\end{cases}$ și $g(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\neq 1\\ 0, \text{ dacă } x=1\end{cases}$. Să se arate că $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1} g(x)=1$ și să se calculeze $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

12. Să se determine asimptotele funcțiilor $f: D\to\mathbf{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiție):

a) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+5}$; c) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$; d) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$;

e) $f(x)=\ln(x^2+x)$; f) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$.

13. Fie $a_n=\left(5-\dfrac{1}{n}\right)^{r_n}$ unde $r_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n\geqslant 1$. Să se studieze monotonia, mărginirea și convergența acestui șir.

14. Să se arate că dacă $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este un șir convergent de numere reale, atunci pentru orice $\varepsilon>0$ există N natural astfel încît $\forall\, m, n\geqslant N$, $|x_m-x_n|<\varepsilon$.

III

15. Să se studieze continuitatea funcțiilor $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ următoare:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ dacă } x\in\mathbf{Q}\\ 2x, \text{ dacă } x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$; b) $f(x)=\sin|x|$; c) $f(x)=x-[x]$;

d) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$; e) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+x\,e^{nx}}{1+e^{nx}}$; f) $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$.

16. Să se arate că ecuațiile următoare au soluții pe intervalele indicate:

a) $x^3+2x-5=0$, $I=(1,2)$; b) $x^4+5x+3=0$, $I=(-1,0)$;

c) $2^x=\dfrac{1}{x}$, $I=(0,1)$; d) $x\ln x=\dfrac{1}{2}-x$, $I=(0,1)$;

e) $\cos^6 x=\sin x$, $I=(0,\pi)$.

17*. a) Fie $f:[0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ o funcție continuă astfel încît $f(0) = f(2\pi)$. Să se arate că există $c \in [0, \pi]$ astfel încît $f(c) = f(c + \pi)$.

b) Să se demonstreze că dacă $f:[-a, a] \to [-a, a]$, $a > 0$ este o funcție continuă, atunci există puncte u, $v \in [-a, a]$ astfel încît $f(u) = u$, $f(v) = -v$.

18*. Un automobil pornește la momentul $t = 0$ dintr-un punct A și la momentul $t = 2$ (timpul măsurat în ore) ajunge într-un punct B după ce a parcurs rectiliniu 160 km. Pentru orice $t \in [0, 2]$ notăm cu $f(t)$ distanța parcursă de automobil în intervalul de timp $[0, t]$ (deci $f(0) = 0, f(2) = 160$) și presupunem că f este funcție continuă. Să se arate că există cel puțin o pereche de puncte (U, V) situate între A și B aflate la o distanță $d(U, V) =$ $= 80$ km și astfel încît automobilul să parcurgă distanța $d(U, V)$ exact într-o oră, iar dacă mișcarea este uniformă există chiar o infinitate de astfel de perechi (U, V).

IV

19. Să se calculeze $f'_s(0)$, $f'_d(0)$ pentru funcțiile $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ 4, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$; b) $f(x) = |x^2 - 2x|$; c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x + 3, & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$.

20. Să se determine constantele reale a, b astfel încît funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + b, & \text{dacă } x \leqslant 2 \\ 2ax^3 + 11a, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$ să fie:

1°. continuă pe $\mathbf{R}$;

2°. derivabilă pe $\mathbf{R}$.

Aceeași problemă pentru funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & \text{dacă } x < 0 \\ b \ln(x + 1), & \text{dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$.

21. Să se afle constantele reale α și β încît funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & \text{dacă } x \leqslant 1 \\ \alpha x + \beta, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe $\mathbf{R}$. Ce interpretare geometrică se poate da rezultatului obținut?

22. Să se indice două funcții derivabile $f, g:(0, 1) \to \mathbf{R}$ astfel încît $f(x) < g(x)$, $f'(x) > g'(x)$ pentru orice $x \in (0, 1)$.

23. Fie $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$. Să se arate că $|f(x)| \leqslant 1$, $|f'(x)| \leqslant \sqrt{2}$, $|f''(x)| \leqslant 2$; pentru orice $x \geqslant 0$.

24. Se consideră funcția $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (ax + \sqrt{1 + a^2x^2})^{\frac{1}{a}}$, unde $a \neq 0$ este o constantă reală.

a) Să se verifice că $\sqrt{1 + a^2x^2} \cdot f'(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) Să se arate că $(1 + a^2x^2)f''(x) + a^2xf'(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Ce relații de forma $P(x) \cdot f''(x) + Q(x) \cdot f'(x) + R(x) \cdot f(x) = 0$ au loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$, unde P, Q, R sînt funcții polinomiale reale?

25. a) Să se determine parametrul real m astfel încît funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = mx - \ln(x^2 + 1)$ să fie monoton descrescătoare pe $\mathbf{R}$.

b) Să se arate că pentru orice parametru real m funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 + mx)e^{-x}$ are un maxim și un minim local.

26. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ și, folosind rezultatul obținut, să se decidă care din numerele $a = 3^{\sqrt[5]{5}}$, $b = 5^{\sqrt[3]{3}}$ este mai mare.

27. Să se arate că există o unică funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabilă, astfel încît $f'(x) = 3f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ și $f(0) = 3$.

28*. Presupunem că f este de două ori derivabilă într-o vecinătate V a unui punct a. Să se arate că pentru orice h suficient de mic există puncte p, q în V astfel încît

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(p) \text{ și } \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(q).$$

29. Să se reprezinte grafic următoarele funcții $f : D \to \mathbf{R}$ (folosind eventual și derivata secundă), D fiind domeniul maxim de definiție:

a) $f(x) = \sqrt{x^6} - \sqrt{x^4}$;

b) $f(x) = x^6 - 2x^3 + 1$;

c) $f(x) = \dfrac{|x| - 1}{x - 1}$;

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-1)^2}$;

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x-2|}{x - 1}$;

g) $f(x) = x + \sqrt{\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|}$;

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$;

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$;

j) $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x-1}$;

k) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|}$;

l) $f(x) = (2 + x)\sqrt{1 - x}$;

m) $f(x) = \operatorname{tg} x + \cos x$;

n) $f(x) = \cos x + \cos \dfrac{x}{2}$;

o) $f(x) = \dfrac{3 + \sin x}{1 + \sin x}$;

p) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

q) $f(x) = \pi x + \sin \pi x$;

r) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$;

s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg}^3 x}$;

t) $f(x) = \sin^2 x - 2\sin^4 x$;

u) $f(x) = x + \ln x^2$;

v) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2}\ln x$;

w) $f(x) = |\ln|x| + x|$;

z) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

30. Se cere numărul de soluții reale ale ecuațiilor $x^4 - 4x + 1 = 0$; $1 + x - \operatorname{arctg} x = 0$; $x^3 - 2x + 1 = \ln |x|$.

31. Să se arate că:

a) $x \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

b) $\ln (x + 1) \geqslant \dfrac{2x}{x + 2}$, dacă $x \geqslant 0$;

c) $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$ și pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

NOTĂ ISTORICĂ

Considerentele de natură istorică în evoluţia unei discipline prezintă un dublu interes unul strict informativ şi altul legat de reflecţiile inevitabile în legătură cu rădăcinile, motivaţiile şi caracterul sinuos al descoperirii ştiinţifice. În ceea ce priveşte matematica, o privire în trecut este poate şi mai oportună, pentru că deşi este ştiinţă fundamentală, ca element direct de cunoaştere sau ca instrument indispensabil pentru alte discipline, există totuşi opinia că matematica ar avea un caracter static, că „totul este cunoscut". Realitatea este că matematica a avut şi are o evoluţie continuă, progresele ei datorîndu-se atît impulsurilor venite din afară (în mod constant din fizică şi din tehnică, iar în ultimul timp din ştiinţele economice), cît şi structurii ei interne, nevoii de cunoaştere şi înţelegere, de armonie şi aspiraţie spre claritate maximă, frumuseţe şi economie de efort.

În această scurtă prezentare vom încerca să examinăm apariţia şi dezvoltarea conceptelor fundamentale pe care le-aţi întîlnit în acest manual — numărul real, funcţia, limita, continuitatea şi derivata, marcînd momentele semnificative. O bună cunoaştere a manualului vă va permite să fiţi în măsură să apreciaţi singuri progresele efectuate.

Numerele raţionale pozitive au fost cunoscute încă din antichitate şi tot atunci geometrii greci au evidenţiat şi insuficienţa acestora, dovedind că diagonala unui pătrat nu este „comensurabilă" cu latura pătratului (adică, în limbajul nostru, numărul $\sqrt{2}$ nu este raţional). O primă tentativă logic coerentă de a construi o teorie a numerelor reale, ca teorie axiomatică a mărimilor, se datoreşte lui Eudox (elev al lui Platon) şi se găseşte în cartea a V-a a Elementelor lui Euclid; în particular este explicitată acolo şi proprietatea lui Arhimede. Teoria lui Eudox era greoaie, puţin favorabilă calculului numeric sau algebric. De altfel, în acea epocă întreaga matematică era învăluită într-o haină geometrică, operaţiile se făceau cu mărimi şi nu cu numere asociate convenabil. Unele reminiscenţe se observă şi astăzi în terminologia curentă (a^2 se citeşte „a pătrat" iar a^3 — „a cub" etc.). Nevoia de a face calcule cu aproximaţii „din ce în ce mai bune", prefigurînd însăşi trecerea la limită, l-a condus pe Arhimede să inventeze metoda cleştelui şi să calculeze cu extraordinară ingeniozitate aria unui subgrafic de parabolă, aria elipsei şi volumele unor corpuri de rotaţie, în pofida lipsei unei teorii sistematice. Încă din antichitate au fost evidenţiate unele şiruri infinite definite prin recurenţă, iar progresiile se întîlnesc în papirusuri egiptene.

Evenimentele istorice (cucerirea Greciei de către romani, năvălirile barbare etc.) au condus la un profund regres şi datorăm culturii arabe transmiterea unor texte antice preţioase ca şi sistemul poziţional de notare a numerelor, pe care îl folosim şi noi. Începînd cu secolul al XIV-lea (elementele lui Euclid fuseseră între timp traduse din arabă în latină), matematica însăşi cunoaşte o adevărată renaştere. Francezul N. Oresme introduce ideea de reprezentare grafică şi demonstrează că seria armonică este divergentă, iar Galileo Galilei utilizează sistematic reprezentarea grafică a dependenţei între mărimi. Matematicienii francezi R. Descartes şi P. Fermat introduc, spre mijlocul secolului al XVII-lea, conceptul de coordonată şi-l utilizează sistematic în reprezentarea geometrică a mărimilor, folosind notaţia algebrică pe care ne-am însuşit-o şi noi. Ideea lor de a studia ecuaţiile cu ajutorul curbelor şi invers a evidenţiat importanţa „variabilelor continue", a condus la descoperirea

geometriei analitice, pregătind terenul pentru progrese mai substanțiale, legate, nu întîmplător, de nevoile astronomiei și navigației.

Pasul hotărîtor în constituirea analizei matematice, ca domeniu esențial de studiu, a fost făcut de englezul Isaac Newton (1642—1727) și de germanul Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716). Este interesant că Newton și-a publicat principalele sale contribuții în mecanică și în optică, dar opera sa matematică a fost publicată în întregime abia în 1967, rezultatele sale matematice circulînd ca scrisori sau manuscrise puse la dispoziția unor prieteni. La sfîrșitul anului 1666 Newton descoperise calculul cu derivate (pe care le numise fluxiuni). Referitor la o curbă $f(x, y) = 0$, Newton avea o viziune pur dinamică, ca loc de intersecție a două drepte mobile, una paralelă cu axa Ox și cealaltă paralelă cu axa Oy, viteza fiind orientată pe tangenta la curbă, obținută compunînd după legea paralelogramului vitezele pe orizontală și pe verticală. Notațiile și modul de calcul propuse de Newton erau greoaie, dar el a descoperit cu această ocazie rezultate esențiale în analiza matematică, ce se confirmau în rezolvările unor probleme concrete și acest fapt nu-l îndemna spre o examinare critică a conceptelor folosite. În aceeași perioadă, Leibniz, trimis ca diplomat la Paris (în 1673) a intrat în contact cu olandezul Cr. Huygens (1629—1695), de la care a aflat de rezultatele lui B. Pascal (1623—1662) în lămurirea conceptului de limită. Leibniz a definit (foarte restrictiv) noțiunea de funcție și a descoperit, independent de Newton, noțiunea de diferențială, regulile de derivare și integrare, introducînd totodată notații potrivite, apropiate de cele folosite astăzi. Newton a contestat meritele lui Leibniz, cerînd instituirea unei comisii care să stabilească prioritatea sa în descoperirea Calculului diferențial. Acum, privind cu detașarea celor aproape 300 ani scurși de atunci, a devenit clar că descoperirile lui Leibniz au fost meritul exclusiv al acestuia și, ca o ironie a soartei, matematicienii englezi, neadoptînd notația și metodele de calcul ale lui Leibniz, au rămas mult timp izolați de realizările majore ale celorlalți matematicieni europeni. Se poate afirma că Leibniz a avut ca scop elaborarea unor metode și algoritmi cît mai generali, în timp ce Newton era interesat în a rezolva îndeosebi probleme fizice. Aceste două moduri de a privi matematica au coexistat dintotdeauna, au ambele justificări serioase și corespund unor temperamente științifice diferite, dar la fel de necesare progresului.

Entuziasmul provocat de rezultatele calculului diferențial creat de Newton și Leibniz a întîrziat fundamentarea riguroasă a conceptelor. Marele matematician elvețian L. Euler (1707—1783) a introdus numărul e, a precizat noțiunea de funcție, acceptînd ideea „funcțiilor cu acoladă" (date prin expresii analitice diferite pe intervale diferite). Studiul matematic al mișcării corzii vibrante și, mai tîrziu, studiul propagării căldurii (datorat lui J.B. Fourier, 1768—1830) au condus la considerarea „funcțiilor arbitrare". P. Lejeune-Dirichlet (1805—1859) a construit în 1829 exemplul său celebru, dat și în acest manual, de funcție discontinuă în orice punct, care nu este definită printr-o expresie analitică. Toate aceste contribuții au impus, cu necesitate, analizarea și sistematizarea conceptelor și rezultatelor obținute. Francezului A.L. Cauchy (1789—1857) și cehului B. Bolzano (1781—1848) le datorăm definirea modernă a conceptului de continuitate (în limbajul $\varepsilon - \delta$), iar lui K. Weierstrass conceptul de continuitate uniformă. În anul 1821 Cauchy a enunțat criteriul de convergență care îi poartă numele și a fundamentat noțiunea de limită introducînd în analiză standarde noi de rigoare. Abia după ce matematicienii germani K. Weierstrass, R. Dedekind, G. Cantor și francezul Ch. Méray au definit conceptul de număr real și după ce Cantor a creat teoria mulțimilor (condus de cercetările sale asupra mulțimilor de convergență punctuală a seriilor trigonometrice), se poate vorbi de fundamentarea riguroasă a analizei matematice.

Metodele analizei matematice s-au dovedit de la început extrem de puternice și în alte domenii ale științei. Astfel marele matematician german Karl Friedrich Gauss (1777—1855) a aplicat rezultatele analizei la studiul curbelor și suprafețelor creînd geometria diferențială, J.L. Lagrange (1736—1813) și P.S. Laplace (1749—1827) au creat mecanica analitică, primul avînd o contribuție însemnată în multe alte domenii. Folosind metode de ana-

liză matematică, Ch. Hermite (1822—1901) și F. Lindemann (1852—1939) au reușit să demonstreze, la sfîrșitul secolului trecut, că numerele e și respectiv π sînt transcendente, dînd astfel răspuns negativ unei probleme care a pasionat omenirea timp de peste două milenii — problema cuadraturii cercului (a construirii, cu rigla și compasul, a unui pătrat avînd aceeași arie cu cea a unui cerc dat).

Datorăm lui Bernhard Riemann (1826—1866), David Hilbert (1862—1943) și lui Henri Lebesgue (1875—1941) rezultatele fundamentale (ce nu pot fi prezentate aici), care au deschis posibilități imense de aplicare a analizei matematice, conducînd la crearea analizei funcționale și marcînd decisiv limbajul întregii științe actuale. Relativ recent, sovieticul S.L. Sobolev (n. 1908) și francezul L. Schwartz (n. 1915) au dat o generalizare naturală a noțiunii de derivată în cadrul teoriei distribuțiilor. Analiza matematică are aplicații profunde în studiul ecuațiilor diferențiale, în teoria controlului optimal, studiul fenomenelor aleatoare, ca și în utilizarea superioară a tehnicii moderne de calcul, iar aventura cunoașterii continuă...

În privința comunicării largi a rezultatelor analizei matematice merită să fie, de asemenea, amintite cîteva momente importante. Primul manual de analiză scris vreodată a fost cel al lui l'Hospital, tipărit puțin înainte de 1700. Printre manualele larg difuzate și cunoscute menționăm pe cele datorate lui L. Euler, A.L. Cauchy, C. Jordan (1838—1922), E. Goursat (1858—1936), Șt. Banach (1892—1945), J. Dieudonné (n. 1906), G.E. Șilov, L. Schwartz.

În țara noastră o serie de profesori de valoare recunoscută au pus bazele unui învățămînt serios al analizei matematice. Menționăm aici numele lui *Spiru Haret* (1851—1912) — întemeietorul învățămîntului românesc modern, autor al unor studii în mecanica cerească făcute cu metode de analiză matematică, *David Emmanuel* (1854—1941) — autorul unui excelent tratat de teoria funcțiilor și *Anton Davidoglu* (1876—1958) — avînd contribuții notabile în teoria ecuațiilor diferențiale.

Printre matematicienii noștri care au obținut rezultate originale de mare însemnătate, recunoscute ca atare pe plan mondial în analiza matematică, în analiza funcțională, teoria funcțiilor și teoria potențialului, subliniem în primul rînd numele lui *Dimitrie Pompeiu* (1873—1954) care, printre altele, a introdus noțiunea de derivată areolară și a demonstrat o teoremă celebră de reprezentare integrală, și numele lui *Traian Lalescu* (1882—1929), autor al unor contribuții de mare importanță în teoria ecuațiilor integrale.

În anii construcției socialiste, matematica românească a cunoscut o dezvoltare deosebită atît pe linia cercetării originale, cît și prin poziția matematicii ca disciplină de învățămînt sau prin legăturile ei cu alte discipline. Lui *Simion Stoilow* (1887—1961) i se datorează lucrări fundamentale, cu rezultate definitive, în teoria topologică a funcțiilor, iar *Miron Nicolescu* (1903—1975) a inițiat și dezvoltat teoria funcțiilor policalorice. S. Stoilow este creatorul școlii românești de teoria funcțiilor (analiza complexă), iar M. Nicolescu este profesorul unei întregi pleiade de tineri cercetători, care se afirmă viguros în domeniul analizei funcționale, teoriei potențialului și teoriei operatorilor.

Datorită unor astfel de prezențe, a devenit o tradiție ca predarea analizei matematice în țara noastră să se afle întotdeauna la cea mai înaltă cotă științifică și didactică.

RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII

CAPITOLUL I

I. § 1 (pagina 12). 1. $x \in \{-a, a\}$; $x = a$; $x \in \{-a, a\}$. **2.** Există $n \in \mathbf{N}$ astfel încît $\frac{y}{x} < n$. **4.** $-3 \leqslant x \leqslant 5$, $-3 \leqslant y \leqslant 7 \Rightarrow -6 \leqslant x + y \leqslant 12$. **5.** a) $x \in \mathbf{R}$; b) $\varnothing$; c) $x \in [0, 2]$; d) $x \in [1, \infty)$; e) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$; f) $x \in \mathbf{R}$; g) $|x - 1| + |x - 1| \cdot |x - 2| > 0 \Rightarrow |x - 1| > 0 \Rightarrow x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. **6.** $|x - y| > 0$; $|x - y| < \frac{1}{10}$. **7.** $\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \cdot |a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$, deoarece $|\varepsilon_i| \leqslant 1$ pentru orice i cuprins între $1 \leqslant i \leqslant n$. **8.** b) Generalizare: dacă $x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_n \leqslant y_n$ şi $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, atunci $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. **10.** Dacă $b_1 = b_2$, atunci $f(x) = 2 \cdot |x + b_1|$ este evident neinjectivă; putem presupune $b_1 < b_2$ etc. În toate cazurile există o paralelă la axa Ox care intersectează graficul lui f în puncte distincte. **18.** Se obţin mulţimi finite de valori în cazurile b, e, f, g. **14.** $\{0\}$; $\varnothing$; $\mathbf{R}$; $[0, 1)$. **15.** Dacă I este un interval mărginit de lungime l, atunci în I se află cel mult $[l] + 1$ numere întregi. **17.** b) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (k, k + 1)$. **18.** Considerăm qx şi există un întreg p unic astfel încît $p \leqslant qx < p + 1$. **20.** $A_1 = [0, 2]$, $A_2 = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $A_4 = \mathbf{R}$, $A_5 = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$, $A_6 = [-4, 4)$. **22.** a) $\left|\frac{3n + 1}{n} - 3\right| < \frac{1}{10}$, deci $n > 10$; b) $n > 10^4$; c) $\left|\frac{3n + 1}{n} - 1\right| < \frac{1}{10}$, $\frac{2n + 1}{n} < \frac{1}{10}$ şi inegalitatea nu este verificată pentru $n \in \mathbf{N}$. **23.** a) Nici una; b) cinci; c) una; d) 40. **24.** a) Luăm $N_1 = 10$ $\left(\text{dacă } n \geqslant 10, \text{ atunci } \frac{n}{n^2 + n + 1} < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{10}\right)$; b) $N_2 = 2$. **25.** a) $M = 2$; b) se observă că $n \leqslant \frac{n^4 + 1}{n^2 + 1}$. **26.** $a = 0$, $b = 3$. **27.** În aproximările $\pi \simeq 3{,}14$, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$ erorile absolute sînt $\varepsilon_1 < \frac{0{,}16}{10^2} < \frac{1}{10^2}$, respectiv $\varepsilon_2 < \frac{0{,}43}{10^2} < \frac{1}{10^2}$. Conform teoremei I.3,1°, avem $\pi + \sqrt{2} \simeq 4{,}55$ cu eroarea absolută cel mult $\frac{0{,}59}{10^2} < \frac{1}{10^2}$. Apoi luăm $\pi \simeq 3{,}141$ şi $\sqrt{2} \simeq 1{,}414$ cu erorile $\varepsilon_1 < \frac{0{,}6}{10^3} < \frac{1}{10^3}$, respectiv $\varepsilon_2 < \frac{0{,}22}{10^3} < \frac{1}{10^3}$; în acest caz $\pi\sqrt{2} \simeq 3{,}141 \times 1{,}414 \simeq 4{,}44$ cu eroarea absolută cel mult $\varepsilon_1\varepsilon_2 + 3{,}141\varepsilon_2 + 1{,}414\varepsilon_1 < \frac{1}{10^7} + \pi\frac{1}{10^3} + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{10^4} < \frac{1}{10^2}$. **28.** Trebuie arătat că $\left|\frac{p + 2q}{p + q} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right|$ (acesta este sensul exact al expresiei „mai bună"); notăm $u = \frac{p}{q}$ şi avem de arătat

că dacă $u > 0$, atunci $\left|\frac{u+2}{u+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant |u - \sqrt{2}|$, adică $\left|\frac{(u-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{u+1}\right| \leqslant$ $\leqslant |u - \sqrt{2}|$ și pentru aceasta, este suficient de observat că $\frac{\sqrt{2}-1}{u+1} \leqslant 1$. **29.** $|a-b| \leqslant 1$; $a = b$. **30.** Presupunem, prin absurd, că $a > b$ și luăm $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Rezultă $b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < a$, ceea ce contravine ipotezei că $a < b + \varepsilon$. **32.** Pentru $n = 0$, $n = 1$ inegalitatea este evidentă. Presupunem inegalitatea adevărată pentru n și o demonstrăm pentru $n + 1$; avem $x^{n+1} = x \cdot x^n \geqslant x[1 + n(x-1)] = x + nx^2 - nx$. Dar $x + nx^2 - nx \geqslant 1 + (n+1)(x-1)$ pentru că aceasta revine la $n(x-1)^2 \geqslant 0$. Așadar, $x^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)(x-1)$.

I. § 2 (pagina 20). 1. Notăm cu D_f domeniul maxim de definiție al unei funcții reale f. a) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1\}$; b) $D_f = [1, \infty)$; c) $D_f = (1, \infty)$; d) $D_f = (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$; e) $D_f = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; q) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{1, -1, \sqrt[4]{31}, -\sqrt[4]{31}\}$; r) $D_f = [-1, 1]$; s) $D_f = \mathbf{R}$; t) $D_f = (1, \infty)$; u) $D_f = \mathbf{R}$; v) $D_f = \{x \in \mathbf{R} \mid \sin x \geqslant 0\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, \pi + 2k\pi]$; w) $D_f = \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$; z) $D_f = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. **5.** a) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \leqslant 0 \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x \geqslant 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{n}, \infty\right) \\ n, \text{ dacă } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \end{cases}$ **6.** Notăm $x + 1 = u$, deci $f(u) = (u-1)^2 +$ $+ 3(u-1) - 1 = u^2 + u - 3$; apoi, notînd $v = 2x - \pi$, avem $f(v) = \cos^2 \frac{\pi + v}{2} =$ $= \sin^2 \frac{v}{2}$ și, în ultimul caz, $f(u) = \left|\frac{1-u}{2}\right|$. **7.** a) Graficul G_g este obținut din G_f prin translație $(x, y) \longmapsto (x + a, y)$, adică $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (x + a, y) \in G_g$; b) Graficul lui u este obținut din graficul lui f prin translația $(x, y) \longmapsto (x, y + k)$, iar graficul lui v prin transformarea $(x, y) \longmapsto (x, ky)$, adică $y = f(x) \Leftrightarrow ky = v(x)$. **8.** Graficul lui $-f$ este simetricul lui G_f în raport cu Ox; graficul lui $|f|$ coincide cu G_f în punctele unde $f \geqslant 0$ și este simetricul acestuia în raport cu Ox în punctele unde $f < 0$. Apoi $(\sigma f(x)) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } f(x) < 0 \\ 1, \text{ dacă } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$ etc. **10.** a) Condiția $|f(x) - 9| < \frac{1}{100}$ revine la $|2x + 7 - 9| < \frac{1}{100}$, adică $|x - 1| < \frac{1}{200}$ și putem lua $\delta = \frac{1}{200}$; b) Condiția $g(x) < -100$ revine la $\frac{1}{2x-2} < -100$, adică $x \in \left(\frac{199}{200}, 1\right)$. Luăm $\delta = \frac{1}{100}$.

1. § 4 (pagina 27). 1. a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}; \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; b) $9, 8, \frac{25}{3}, 9, \frac{49}{5}, \frac{32}{3}$; c) $2, 2, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{60}$. **2.** a) Pentru $x = 1{,}02$, $n = 100$ se obține $1{,}02^{100} \geqslant 1 +$ $+ 100 \cdot 0{,}02 = 3$; b) Dacă $0 < a < 1$, atunci $a = \frac{1}{1+r}$, cu $r > 0$, deci $a^n =$ $= \frac{1}{(1+r^n)} < \frac{1}{1+nr}$. Punînd condiția $\frac{1}{1+nr} > \frac{1}{10}$, rezultă $n > \frac{9}{r}$ și alegem $N =$ $= \left[\frac{9}{r}\right] + 1$; c) Presupunem $a > 1$, deci $a^n = [1 + (a-1)]^n \geqslant 1 + n(a-1)$. Punem

condiția $1 + n(a-1) > 10$ și rezultă $n > \frac{9}{a-1}$ și, luînd $N = \left[\frac{9}{a-1}\right] + 1$, rezultă $a^n > 10$, pentru orice $n \geqslant N$. Deoarece $a > 1$, rezultă $a^n > 1$ și nu putem avea $a^n < \frac{1}{10}$. **3.** a) Dacă mulțimea A este mărginită, atunci există $a < b$ și $A \subset [a, b]$ și dacă $B \subset A$, atunci $B \subset [a, b]$, deci B este mărginită; b) $A_1 \cap A_2$ și $A_1 \setminus A_2$ sînt mulțimi mărginite ca submulțimi ale lui A_1 etc. **4.** 1°. Dacă $a \geqslant b$, atunci $\max(a, b) = a$, $\min(a, b) = b$ și relațiile de demonstrat devin $a = \frac{a+b+(a-b)}{2}$; $b = \frac{a+b+(b-a)}{2}$ și sînt evidente etc. 2°. Dacă $a \neq b$, atunci avem $a < b$ sau $b < a$ și, în acest caz, $\max(a, b) \neq \min(a, b)$. **5.** a) Minoranții lui A sînt numerele $x \leqslant -1$, iar majoranții sînt $x \geqslant 1$, $\min A = -1$, dar $\max A$ nu există; c) $\sin 1 \simeq \sin 57°18'$, $\sin 2 \simeq \sin 114°36'$, $\sin 3 \simeq \sin 171°54' = \sin 8°06'$, deci $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$, $\min A = \sin 3$, $\max A = \sin 2$; d) $\min A = -2$, $\max A = 4$, minoranții (respectiv majoranții) sînt numerele $x \leqslant -2$ (respectiv $x \geqslant 4$); e) Avem $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}$, $\min A = 0$, $\max A$ nu există; apoi minoranții lui A sînt numerele $x \leqslant 0$ etc.; f) $\min A = \frac{1}{3}$, $\max A$ nu există. Minoranții (respectiv majoranții) lui A sînt numerele $x \leqslant \frac{1}{3}$ $(x \geqslant 1)$ **6.** Fie $a = \inf C$, $b = \sup C$. Arătăm că $\sup(-C) = -a$. Pentru orice $x \in -C$, avem $-x \in C$, deci $-x \geqslant a$, adică $x \leqslant -a$, deci $-a$ este un majorant al mulțimii $-C$. Apoi $-a$ este cel mai mic majorant al lui $-C$ (într-adevăr, dacă c este un majorant oarecare pentru $-C$, atunci $-c$ este un minorant pentru C, deci $-c \leqslant a$, adică $-a \leqslant c$). Așadar $-a = \sup(-C)$ etc. **7.** $\inf M_1 = -\sqrt{2}$, $\sup M_1 = \sqrt{2}$; $\inf M_2 = -\sqrt{2}$, $\sup M_2 = \sqrt{2}$; $\inf M_3 = -2$, $\sup M_3 = 2$. **8.** a) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 1$; b) Avem $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 2$, pentru orice $n \geqslant 1$ și $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = a_0 = \sqrt{2}$; c) $\inf a_n = 0$, $\sup a_n = 1$; d) $\inf a_n = \frac{1}{2}$, $\sup a_n = 2$; e) $\inf a_n = a_0 = 0$, $\sup a_n = 10$; f) $\inf a_n = \cos 1$, $\sup a_n = 1$. **9.** a) $A = (\sqrt{3}, \infty)$, deci $\inf A = \sqrt{3}$, $\sup A = \infty$; c) Avem $\inf A = 0$, $\sup A = \infty$; d) $\inf A = -\infty$, $\sup A = \infty$. **10.** a), c). **11.** Da, nu, da. **12.** a) și c) sînt vecinătăți ale lui ∞, iar b), c) sînt vecinătăți pentru $-\infty$. **13.** În orice vecinătate $(-r, r)$, $r > 0$ a originii se află o infinitate de numere de forma $\frac{1}{n^2}$ $\left(\text{pentru că avem } \frac{1}{n^2} < r, \text{ pentru orice } n > \frac{1}{\sqrt{r}}\right)$. Apoi în orice interval (a, ∞) se află o infinitate de pătrate de numere naturale. **14.** În orice vecinătate a punctului $\alpha = 8$ se află o infinitate de elemente ale fiecărei mulțimi D. **15.** Punctele de acumulare: a) $[-1, 1]$; b) $[-\infty, 1] \cup [5, \infty]$; c) $\pm\infty$; d) $\overline{\mathbf{R}}$; e) originea; f) $D = [0, 1] \cup \{-1\}$. În exemplele c) și e) punctele sînt izolate. **16.** Fie $A = \{a_n \mid n \geqslant 0\}$ și $a = \sup A$. Avem $a_n \leqslant b_n$, $\forall\, n \geqslant 0$, deci $a \leqslant b = \inf b_n$. Pentru orice $c \in [a, b]$, avem $a_n \leqslant a \leqslant c \leqslant b \leqslant b_n$, adică $c \in I_n$, pentru orice $n \geqslant 0$.

1. § 5 (pagina 35). 1. Funcțiile a, c, h, i, j sînt pare, iar d, e, f, k sînt impare. **2.** Perioadele principale sînt respectiv π, π, $\frac{2\pi}{|\omega|}$. **3.** a) În acest caz, $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (2a - x, y) \in G_f$, adică $y = f(x) \Leftrightarrow y = f(2a - x)$ și aceasta revine la existența relației $f(x) = f(2a - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. O funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ are graficul simetric față de punctul $(a, 0)$, dacă și numai dacă $f(2a - x) = -f(x)$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$; b) Așadar, $f(x) = f(2a - x) = f(2b - x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ $(a < b)$; înlocuim $x = 2a - y$ și rezultă

că pentru orice $y \in \mathbb{R}$ avem $f(y) = f(2b - 2a + y)$, deci f este periodică cu perioada $2b - 2a$. **4.** Dacă $x_1 < x_2$, atunci $x_1^3 < x_2^3$, $x_1^5 < x_2^5$ și rezultă imediat $f(x_1) < f(x_2)$ și $g(x_1) < g(x_2)$. **5.** a) f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$; b) este strict crescătoare; c) f este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$; d) Presupunem $x_1 < x_2$. Diferența $f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2^2}{1 + x_2^2} - \frac{x_1^2}{1 + x_1^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(1 + x_2^2)(1 + x_1^2)}$ nu are un semn constant, deci f nu este monotonă pe $\mathbb{R}$ (f este monoton descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și monoton crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. **6.** f rezultă injectivă (dacă $x_1 \neq x_2$, de exemplu, dacă $x_1 < x_2$, rezultă $f(x_1) < f(x_2)$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$). Apoi, dacă $y_1 < y_2$, rezultă $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$; în caz contrar, avem $f^{-1}(y_2) \leqslant f^{-1}(y_1)$ și aplicînd f, ar rezulta $y_2 \leqslant y_1$, ceea ce este absurd. **8.** a) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, $n > 1$; b) $a_n = n^2$, $n \geqslant 0$. **9.** Se arată că diferența $a_{n+1} - a_n$ este pozitivă pentru orice $n \geqslant 1$ ($n \in \mathbb{N}$). **10.** a) $|f(x)| \leqslant 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$; b) $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $0 \leqslant f(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; d) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; e) $|f(x)| \leqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$; f) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. **11.** Funcțiile b, f sînt mărginite. **12.** Vom nota $m = \inf_{x \in D} f(x)$, $M = \sup_{x \in D} f(x)$. Răspunsurile sînt: a) $m = -1$, $M = 1$; b) $m = 0$, $M = 1$; c) $m = 0$, $M = 1$; d) $m = 0$, $M = 1$.

CAPITOLUL II

II. § 1 (pagina 48). 1. a) Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiția $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ este îndeplinită pentru orice $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ și, în particular, pentru orice $n \geqslant N$, unde $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$. Așadar, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Putem, de asemenea, folosi următorul rezultat general: dacă $(a_n)_{n \geqslant k}$ este un șir crescător și nemărginit, atunci $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = 0$, aplicat pentru $a_n = n^2$, $n \geqslant 1$; b) Pentru orice $\varepsilon > 0$, condiția $\frac{n}{n^2 + 1} < \varepsilon$, adică $\varepsilon n^2 - n + \varepsilon > 0$ este îndeplinită pentru orice n în cazul cînd $\varepsilon > \frac{1}{2}$; dacă $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$, atunci, luînd $N(\varepsilon) = \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2}\right] + 1$, condiția anterioară are loc pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$. De asemenea, se poate aplica rezultatul general amintit mai sus pentru $a_n = \frac{n^2 + 1}{n} = n + \frac{1}{n}$, care este un șir crescător și nemărginit. Se poate raționa similar pentru toate celelalte exerciții. **2.** Avem de arătat că $\lim_{n \to \infty} \frac{2}{n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} = 0$, $\lim_{n \to \infty} \frac{p}{n} = 0$ ($p \geqslant 1$ fixat), $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} = 1$, ceea ce este evident. **3.** Fie $a_n = \frac{4n - 1}{n}$, $n \geqslant 1$ și V o vecinătate oarecare a punctului $a = 4$. Așadar există

$r >$ astfel încît $(4 - r, 4 + r) \subset V$. Punem condiția $a \in (4 - r, 4 + r)$, adică $|a_n - 4| < r$, adică $\left|\frac{4n-1}{n} - 4\right| < r$, deci $n > \frac{1}{r}$. Așadar, toți termenii a_n ai șirului pentru $n > \frac{1}{r}$ aparțin lui V. Se raționează similar în cazul exercițiului secund. **4.** Șirurile b, c, e, f, g, h sînt convergente. Șirul a) nu este convergent deoarece are trei subșiruri care converg către limite distincte, iar pentru șirul d) $a_{2n} \to 2$, $a_{2n+1} \to 0$, deci șirul $(a_n)_{n \geqslant 0}$ este divergent. **5.** Există $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice N natural să existe n natural $n \geqslant N$ cu proprietatea că $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. **6.** Avem $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ și $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ pentru orice $n \geqslant 0$, deci șirul $(a_n)_{n \geqslant 0}$ este monoton și mărginit. Avem $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{9}{13}$, $a_4 = \frac{4}{5}$, $a_5 = \frac{25}{29}$, $a_6 = \frac{9}{10}$ etc. și ne este sugerat că $a_n \to 1$. Într-adevăr $|a_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+4} - 1\right| = \frac{4}{n^2+4} \to 0$. **7.** a) $a_1 = 1{,}002$; $a_2 = 0{,}252$; $a_3 \simeq 0{,}113$; $a_4 = 0{,}0645$; $a_5 = 0{,}042$. Nu! (avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0{,}002$); b) Avem $a_{2n} \to 2$ și $a_{2n+1} \to 0$, deci șirul este divergent. **8.** a) Șirul este mărginit; b) Șirul este constant, $a_n = 0, \forall\, n \geqslant 0$; c) $a_n \to 0$. **9.** a) $0 \leqslant \frac{\cos^2 n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$; $\left|\frac{2^n - 1}{2^n + 1} - 1\right| = \frac{2}{2^n+1} < \frac{1}{n}$; $\left|\frac{4n+1}{n+1} - 4\right| = \frac{3}{n+1}$; $\left|\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\right| \leqslant \frac{1}{n}$; c) $n^2 + 1 > n$. **11.** a) Avem $|a_{n+2} - a_n| = |a_{n+2} - a + a - a_n| \leqslant |a_{n+2} - a| + |a - a_n|$. Deoarece $a_n \to a$, rezultă $|a_n - a| \to 0$, $|a_{n+2} - a| \to 0$, deci $a_{n+2} - a_n \to 0$; b) Dacă $a_n \to a$, atunci în afara oricărei vecinătăți a lui a se află un număr finit de termeni ai șirului $(a_n)_{n \geqslant 0}$, deci un număr finit de termeni ai șirului $(a_{p(n)})_{n \geqslant 0}$. Așadar, $a_{p(n)} \to a$. **13.** $a + \frac{1}{n} \to a$; luăm $b_n = \frac{a}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$. **14.** Pentru orice $\varepsilon > 0$ condiția $\sqrt{n} > \varepsilon$ este îndeplinită pentru orice $n > \varepsilon^2$, deci pentru orice $n \geqslant N$, unde $N = [\varepsilon^2] + 1$. Apoi $2^{n-1} \geqslant n$ și $\frac{n^2+4}{n} \geqslant n$ pentru orice $n \geqslant 1$ și aplicăm teorema II.4,2°. **15.** De exemplu, $a_n = -n + (-1)^n$, $n \geqslant 1$. **16.** Dacă un șir $(a_n)_{n \geqslant 0}$ este nemărginit, atunci el nu poate fi convergent, conform teoremei II.3. Șirurile $(2^n)_{n \geqslant 0}$, $((-2)^n)_{n \geqslant 0}$ sînt nemărginite, deci divergente; primul are limita ∞ și al doilea nu are limită.

II. § 2 (pagina 57). 1. a) Dacă $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, atunci $x_n + 5 \to \alpha + 5$, deci $f(x_n) \to f(\alpha)$. Așadar, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$, adică $\lim\limits_{x\to\alpha} (x + 5) = \alpha + 5$; b) Dacă $x_n \to \alpha$, $x_n \neq \alpha$, atunci $x_n^2 \to \alpha^2$, deci $\lim\limits_{x\to\alpha} x^2 = \alpha^2$; c) $\lim\limits_{x\to\alpha} (x^2 + 5) = \alpha^2 + 5$. **2.** $x = 1$; dacă $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, atunci șirul $f(x_n) = \frac{1}{2x_n - 2}$ nu are limită. În cazul secund, funcția f nu are limită în punctele $x = 0$, $x = 2$. **3.** a) Fie V o vecinătate oarecare a punctului $l = \frac{2}{3}$, deci există $\varepsilon > 0$ astfel încît $\left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon\right) \subset V$. Notăm $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $x \neq -2$ și punem condiția ca $f(x) \in \left(\frac{2}{3} - \varepsilon, \frac{2}{3} + \varepsilon,\right)$, adică $\left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ sau, echivalent, $\frac{|x-1|}{|x+2|} < 3\varepsilon$. Alegem δ astfel încît $0 < \delta < 2$ și $\delta < 3\varepsilon$ și notăm $U = (1 - \delta, 1 + \delta)$. Atunci, dacă $x \in U$, $x \neq 1$, avem $x + 2 > 3 - \delta > 1$, deci $\frac{1}{|x+2|} < 1$ și $|x - 1| < \delta < 3\varepsilon$ și, ca atare, am arătat că dacă $x \in U$, $x \neq 1$, avem $f(x) \in V$ și, în concluzie, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{2}{3}$; b) Similar.

4. Se aplică teorema II.7 și avem $f(0-0)=-\infty$, $f(0+0)=\infty$, $g(0-0)=-\infty$, $g(0+0)=\infty$ și, ca atare, f și g nu au limită în origine. Apoi $(f-g)(x)=3x$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{5x^2+1}{2x^2+1}$ și $\lim\limits_{x\to 0}(f-g)(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=1$ etc. **5.** a) Fie V o vecinătate oarecare pentru ∞; alegem $\varepsilon>0$ astfel încît $(\varepsilon,\infty]\subset V$ și punem condiția $\frac{1}{(x-1)^2}>\varepsilon$, adică $(x-1)^2<\frac{1}{\varepsilon}$, sau $|x-1|<\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Luînd $U=\left(1-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ rezultă că pentru orice $x\in U$ avem $\frac{1}{(x-1)^2}\in V$, deci $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$, folosind definiția II.4; b) Condiția (4) nu poate fi îndeplinită pentru nici o valoare $l\in\overline{\mathbb{R}}$, deoarece orice vecinătate a punctului $x=1$ conține puncte unde $f(x)$ este oricît de mare sau oricît de mic. De altfel, $f(1-0)=-\infty$, $f(1+0)=\infty$. **6.** Funcțiile f, g au limită în orice punct, iar h are limită în orice punct $x\neq 1$. **7.** Funcțiile g și h nu au limită în punctul $x=0$, dar f, g, h au limită în orice punct $x\neq 0$. **8.** a) $f(0-0)=f(0+0)=0$; b) $f(0-0)=-1$; $f(0+0)=1$; c) $f(0-0)=0$, $f(0+0)=2$; d) $f(1-0)=1$, $f(1+0)=2$; e) $f(7-0)=9$; $f(7+0)=9$; $f(2-0)=f(2+0)=4$. **9.** Pentru $k=-2$; pentru nici o valoare a lui k. **10.** a) $S_{f,a}=0$; b) $f(2+0)=8$, $f(2-0)=3$, deci $S_{f,a}=5$; c) $f(1+0)=k+2$, $f(1-0)=-1$, deci $S_{f,a}=k+3$.

II. § 3 (pagina 68). 1. Se aplică teorema II.8. **2.** Așadar există $M>0$ astfel încît $|b_n|\leqslant M$ pentru orice $n\geqslant 0$. Atunci, $|a_nb_n-0|\leqslant M\cdot|a_n|$ și, aplicînd teorema II.4.1°, rezultă $a_nb_n\to 0$. **3.** Fie $a_n\to a$, $a\neq 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=\frac{a}{a}=1$. Pentru partea secundă luăm $a_n=\frac{-(1)^n}{n}$ și avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1$. **4.** $c_n=\frac{n^2\left(2+\frac{7}{n}-\frac{10}{n^2}\right)}{n^2\left(5+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{2+\frac{7}{n}-\frac{10}{n^2}}{5+\frac{1}{n^2}}$ și luăm $a_n=2+\frac{7}{n}-\frac{10}{n^2}$, $b_n=5+\frac{1}{n^2}$. Evident $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{2}{5}$. **5.** Se procedează ca la exercițiul precedent. a) $\frac{1}{2}$; b) 1; c) 0; d) 8. **6.** Avem $1\leqslant\sqrt[n]{1^p+2^p+\ldots+n^p}\leqslant\sqrt[n]{n\cdot n^p}=(\sqrt[n]{n})^{p+1}$ și $\sqrt[n]{n}\to 1$ etc. **7.** 1°. Dacă l e finit, luăm $a_n=\frac{l}{n}$, $b_n=\frac{1}{n}$; pentru $l=\infty$, $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$; pentru $l=-\infty$, $a_n=-\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$; 2°. Pentru $l\in\mathbb{R}$, luăm $a=n+l$, $b_n=n$; pentru $l=\infty$, $a_n=n^2+n$, $b_n=n$ etc.

II. § 4 (pagina 78). 1. a) 0; b) 1; c) 0; d) 4; e) ∞; f) 0; g) 0; h) 0; i) 1; j) ∞; k) ∞; l) ∞; m) $-\infty$; n) 0; o) 2; p) $\frac{1}{3}$; q) 0; r) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2}$; s) $\frac{1}{3}$; t) $\frac{1}{2}$; u) 100; v) ∞; w) 0; y) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n-1}{a^{n^2}+1}=\begin{cases}-1, & \text{dacă } |a|<1\\ 0, & \text{dacă } a=1\\ 0, & \text{dacă } |a|>1\end{cases}$;

z) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{2n}-1}{a^{2n}+1}=\begin{cases}-1, \text{ dacă } |a|<1\\ 1, \text{ dacă } |a|>1\\ 0, \text{ dacă } a=\pm 1\end{cases}$. **2.** Dacă $R=\dfrac{P}{Q}$, avem $\dfrac{R(n)}{R(n+1)}=$ $=\dfrac{P(n)\cdot Q(n+1)}{Q(n)\cdot P(n+1)}\to 1$, deoarece $\dfrac{P(n)}{P(n+1)}\to 1$, $\dfrac{Q(n+1)}{Q(n)}\to 1$ (P, Q fiind funcţii polinomiale). **3.** $a_n=\dfrac{1\cdot 3}{2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{(n-2)\cdot n}{(n-1)^2}\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\dfrac{n+1}{2n}\to\dfrac{1}{2}$.

4. $a=1$, $b=0$, $c=1$. **5.** $|b|<1$, a arbitrar sau $b\neq 1$, $a=\dfrac{1}{1-b}$. **6.** Arătăm prin inducţie că $0\leqslant a_n\leqslant 2$ pentru orice $n\geqslant 1$. Pentru $n=1$ afirmaţia este evidentă; apoi dacă $0\leqslant a_n\leqslant 2$, atunci $0\leqslant a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\leqslant\sqrt{2+2}=2$. Şirul este crescător; într-adevăr, avem $a_{n+1}\geqslant a_n$, adică $\sqrt{2+a_n}\geqslant a_n$, $a_n^2-a_n-2\leqslant 0$ sau $(a_n-2)(a_n+1)\leqslant 0$, deoarece $0\leqslant a_n\leqslant 2$. Aşadar, şirul este convergent şi fie $a_n\to l$, deci $l\geqslant 0$ şi, din relaţia de recurenţă, $l=\sqrt{2+l}$, de unde $l=2$. **7.** Pentru $n=0$, 1, 2 relaţia se verifică; o presupunem adevărată pentru orice $k\leqslant n$ şi o probăm pentru $n+1$, adică presupunem $a_{n-2}=\dfrac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{n-1}\dfrac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-3}}$ şi $a_{n-1}=\dfrac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^n\cdot\dfrac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-2}}$ şi probăm acelaşi lucru pentru a_n, folosind relaţia $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$. Apoi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2a_1+a_0}{3}$. **8.** $x_{n+1}-1=(x_n-1)^2$ şi notăm $y_n=x_n-1$, $y_1\in[0,1]$ etc. **9.** Evident $c_n\geqslant 0$. Mai mult, se verifică prin inducţie că avem $c_n\geqslant\sqrt{2}$; într-adevăr $c_1\geqslant\sqrt{2}$ şi dacă $c_n\geqslant\sqrt{2}$, atunci $c_{n+1}=\dfrac{2+c_n^2}{2c_n}\geqslant\sqrt{2}$, deoarece $(c_n-\sqrt{2})^2\geqslant 0$. Apoi $c_{n+1}-c_n=$ $=\dfrac{2+c_n^2}{2c_n}-c_n=\dfrac{2-c_n^2}{2c_n}<0$. Aşadar, şirul $(c_n)_{n\geqslant 1}$ este descrescător şi mărginit inferior, deci convergent. **10.** Alegem q astfel încît $l<q<1$. Conform ipotezei, există N astfel încît $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q$ pentru orice $n\geqslant N$, deci $a_{N+1}<qa_N$, $a_{N+2}<qa_{N+1}<q^2a_N$, şi, în general, $0<a_{N+k}<q^k\cdot a_N$. Pentru $k\to\infty$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Notăm $a_n=\dfrac{n}{2^n}$; avem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$, deci, conform celor spuse mai sus, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ etc. **11.** a) Pentru orice $k\geqslant 1$, $\dfrac{1}{4k^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$, deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k^2-1}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k^2+k}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}$; c) $-\dfrac{1}{3}$; d) 2; e) $\dfrac{1}{21}$; f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}=2\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots\right)+\left(\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots\right)=$ $=2e+(e-1)=3e-1$. **12.** Sumele parţiale de rang n sînt $s_n=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\to 1$ şi respectiv $s_n=\sqrt[3]{n+1}-1\to\infty$.

II. § 5 (pagina 76). 1. a) $f(-5-0)=-\infty$, $f(-5+0)=\infty$; b) dacă $x_n\to 3$, $x_n<3$, atunci $\dfrac{1}{x_n-3}\to-\infty$ şi $2^{\frac{1}{x_n-3}}\to 0$, deci $f(3-0)=1$; similar, dacă $x_n\to 3$, $x_n>3$,

atunci $\frac{1}{x_n-3}\to\infty$, $2^{\frac{1}{x_n-3}}\to\infty$ şi $f(3+0)=0$; c) $f(0-0)=f(0+0)=\infty$; d) $f(-1-0)=f(-1+0)=\infty$. De remarcat că limita există (fără a fi finită) doar în cazurile c şi d. **2.** a) ∞; b) 2; c) 0; d) 0; e) $-\infty$; f) 3; g) ∞; h) $-\infty$; i) ∞; j) $\frac{11}{2}$.

3. Presupunem că există $l=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Arătăm atunci că există limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)$ şi că este egală cu l. Într-adevăr, fie un şir oarecare $x_n\to\infty$, atunci $-x_n\to-\infty$ şi, conform ipotezei, $f(-x_n)\to l$. Reciproca se demonstrează similar. Regula stabilită poate fi formulată şi astfel: limita $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ există dacă (punînd $x=-z$) există limita $\lim\limits_{z\to-\infty} f(-z)$ şi, în acest caz, cele două limite sînt egale; pe scurt, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{z\to\infty} f(-z)$. Aplicaţie:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{z\to\infty}(z^2+z)=\infty$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{z\to\infty}\left(\sqrt{z^2+1}-z\right)=$

$=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\sqrt{z^2+1}+z}=0$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+1}{7x^2+3}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{4z^2+1}{7z^2+3}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2\left(4+\frac{1}{z^2}\right)}{z^2\left(7+\frac{3}{z^2}\right)}=$

$=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{4+\frac{1}{z^2}}{7+\frac{3}{z^2}}=\frac{\lim\limits_{z\to\infty}\left(4+\frac{1}{z^2}\right)}{\lim\limits_{z\to\infty}\left(7+\frac{3}{z^2}\right)}=\frac{4}{7}$; d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{-z}{\sqrt{z^2+1}}=$

$=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{-z}{z\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}=-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{z^2}}}=-1.$

II. § 6 (pagina 80). 1. a) Funcţia admite doar asimptota orizontală $y=2$ (spre $-\infty$ şi spre $+\infty$); b) $x=-1$, $x=1$ asimptote verticale; $y=0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre $+\infty$; c) $x=0$, $x=-2$, $y=0$; d) $x=0$ asimptotă verticală la dreapta şi $y=0$ asimptotă orizontală spre ∞; e) $x=-1$; $y=-1$ (respectiv $y=1$) asimptotă orizontală spre $-\infty$ (respectiv $+\infty$); f) $y=-1$ (respectiv $y=1$) asimptotă orizontală spre $-\infty$ (respectiv ∞), $x=-2$ asimptotă verticală; g) $x=1$, $x=5$ verticale, $y=0$ orizontală; h) $x=0$ verticală, $y=x+1$ oblică (spre $-\infty$ şi $+\infty$); i) $D=(-\infty,0)$ şi $f(x)=0$, $\forall x\in D$. În acest caz $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$; j) $x=0$ verticală; $y=1$ spre $-\infty$ şi ∞; k) $x=1$ verticală; $y=x+1$ oblică spre $+\infty$ şi $y=-x-1$ oblică spre $-\infty$; l) $D=\mathbb{R}$. Funcţia nu are asimptote. **2.** a) $a=5$, b nedeterminat; b) $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$; c) $a=8$, $b=2$. **3.** $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}$.

II. § 7 (pagina 92). 1. a) -1; b) 0; c) 0; d) 0; e) 91; f) ∞; g) $-\infty$; h) ∞; i) $-\infty$; j) $2\sqrt{6}$; l) $-\infty$; m) 0; n) ∞; p) -1; q) ∞; r) ∞; s) 1; t) -1; u) 1; v) 1. **2.** a) $\frac{m}{n}$; b) 1, dacă $m=n$; 0, dacă $m<n$; ∞, dacă $m>n$. **3.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{3}$; c) ∞; d) 0; e) $-\infty$; f) 2; g) -2. **5.** $P(x)=(ax+b)Q(x)+r$, $\operatorname{gr} r<\operatorname{gr} Q$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}-(ax+b)\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{r}{Q(x)}=0$. **6.** Alegem şirurile $x'_n=\frac{1}{n\pi}$, $x''_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ $(n\geqslant 1)$ care converg către zero, iar $f(x'_n)\to 0$, $f(x''_n)\to 1$, deci limita $\lim\limits_{x\to0}\sin\frac{1}{x}$ nu există etc.

7. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2\sqrt{a-b}}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1; g) ∞; h) $\frac{5}{4}$; i) 1; j) $\frac{1}{4}$; k) 6; l) 0; m) 0; n) 0; o) $\frac{1}{e}$ **8.** a) $l_s = 0$; $l_d = \infty$; b) $l_s = 0$, $l_d = \infty$; c) $l_s = l_d = \infty$; d) $l_s = \infty$; $l_d = 0$; e) $l_s = l_d = \infty$. **9.** a) $-\infty$; b) ∞; c) 0; d) ∞; e) 0; f) ∞; g) $-\infty$; h) 0. **10.** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) =$ $= a_0 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$. Se foloseşte esenţial faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty$. **11.** a) $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta $\left(\text{deoarece } \lim\limits_{x\to 0,\, x>0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{e^z}{z} = \infty\right)$; $y = x + 1$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ şi spre $+\infty$; b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ şi spre ∞; k) $x = \frac{5}{3}$ este asimptotă verticală, $y = -\frac{1}{3}$ asimptotă orizontală spre $-\infty$, $y = \frac{1}{3}$ asimptotă orizontală spre ∞; l) $x = 1$, $x = -1$ sînt asimptote verticale. **12.** a) e^{-4}; b) e^{-1}; c) e; d) 1; e) 1; f) e. **13.** Logaritmînd, avem de arătat că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n}{n} = \ln a$, ceea ce rezultă din faptul că, dacă $c_n \to a$ (în $\mathbf{R}$), atunci $\frac{1}{n}(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \to a$. **14.** $k = 1$.

CAPITOLUL III

III. § 1 (pagina 107). 1. a) Dacă $x_n \to 1$, $x_n \neq 0$, atunci $f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 1$, adică $f(x_n) \to f(1)$; similar, dacă $x_n \to -5$, atunci $\frac{1}{x_n} \to -\frac{1}{5}$, adică $f(x_n) \to f(-5)$; b) dacă $x_n \to 2$, $x_n \leqslant 2$, atunci $f(x_n) = \sqrt{2 - x_n} \to 0 = f(0)$. **2.** Condiţia $|f(x) - 1| < \frac{1}{10}$ se scrie $|x^3 - 1| < \frac{1}{10}$ şi cum $|x + 1| \leqslant 4$ (deoarece $0 \leqslant x \leqslant 3$), condiţia anterioară este îndeplinită dacă $|x - 1| < \frac{1}{40}$, adică pentru $\delta = \frac{1}{40}$. Este adevărat că f este continuă în punctul $x = 1$, dar trebuie verificat că pentru orice $\varepsilon > 0$ $\left(\text{şi nu numai pentru } \varepsilon = \frac{1}{10}\right)$ există $\delta > 0$ astfel încît $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$. **3.** a, b, d, h. **4.** Orice punct $x \neq 0$. **5.** Avem $f(3 - 0) = 6$, $f(3 + 0) = 3a$, $f(3) = 6$ şi continuitatea lui f în punctul $x = 3$ are loc pentru $a = 2$. **6.** Funcţia f este continuă pe intervalele $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$, fiind elementară. Condiţia de continuitate în punctul $x = 2$ este $4 + a = 2a + b$; apoi limitele la stînga şi la dreapta ale raportului considerat sînt egale cu 4 şi a, deci $4 + a = 2a + b$, $a = 4$. Atunci $a = 4$, $b = 0$. **7.** $x^2 - 2x \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 2x$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Pentru $x = 0$ rezultă $f(0) = 0$. Apoi pentru orice şir $x_n \to 0$ rezultă $x_n^2 - 2x_n \leqslant f(x_n) \leqslant x_n^2 + 2x_n$, deci $f(x_n) \to 0$. **8.** $f(0 - 0) \neq f(0 + 0)$, $g(0 - 0) = 0$ şi $g(0 + 0) = \infty$. **10.** a) În punctele $x \neq 0$ funcţia f este continuă, fiind elementară, iar în punctul $x = 0$ avem $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$; într-adevăr, $\left|x \sin\frac{1}{x} - 0\right| \leqslant |x|$, adică $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$; b) în orice vecinătate V a originii, funcţia f este nenulă, dar se anulează de o infinitate de ori, deci nu poate fi monotonă pe V. **12.** a) $f = 0$ este continuă;

b) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x < 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } x = 0 \text{ și } f \text{ este continuă} \\ 1, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$

în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$; d) $f = \operatorname{sgn}$ și este continuă în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. **13.** Fie $x_0 \in I$ și $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in I\setminus\{x_0\} \\ 0, \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in I\setminus\{x_0\} \\ 1, \text{ dacă } x = x_0 \end{cases}$. Funcțiile f, g sînt discontinue în x_0, dar $f + g = 1$, $fg = 0$.

III. § 2 (pagina 115). 1. Funcția f este continuă; faptul că f nu este mărginită pe $[1, \infty)$ rezultă observînd că pentru orice M există $x \in [1, \infty)$ astfel încît $f(x) > M$. **2.** Marginile lui f sînt -1 și 0, dar nu coincid cu vreo valoare $f(x)$, $x \in (1, 2)$, deci nu sînt atinse etc. **3.** Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, există $\delta > 0$ astfel încît pentru orice $x > \delta$ avem $|f(x)| < 1$. Pe intervalul compact $[0, \delta]$ funcția f este mărginită (fiind continuă), deci există $M > 0$, astfel încît $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in [0, \delta]$. Așadar, $|f(x)| \leqslant \max(M, 1)$ pentru orice $x \in [0, 8)$, deci f este mărginită. **5.** Nu, pentru că f nu este continuă în $x = 0$. **6.** Așadar, există $M > 0$ astfel încît $|f(x)| \leqslant M$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Considerăm funcția continuă $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - x$. Avem $g(-M) = f(-M) + M \geqslant 0$ și $g(M) = f(M) - M \leqslant 0$, deci, conform lemei (teorema III.6), există $\xi \in [-M, M]$ astfel încît $g(\xi) = 0$, adică $f(\xi) = \xi$. **7.** a) $f(0) \cdot f(4) < 0$; b) $f(-1) \cdot f(0) < 0$; c) presupunem $a > 0$, avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci există puncte $a_1 < b_1$ din $\mathbf{R}$ astfel încît $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, deci funcția continuă f se va anula pe (a_1, b_1); d) $f(1) = 0$. **8.** a) $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$; b) $x \in (-\infty, -5) \cup (1, 2)$; c) $x \in A_1 \cup A_2$ unde $A_1 = \bigcup\limits_{k\leqslant -1} (k\pi, (k+1)\pi)$, k impar și $A_2 = \bigcup\limits_{k\geqslant 0} (k\pi, (k+1)\pi)$, k par. **9.** $a = \sqrt{5}$.

CAPITOLUL IV

IV. § 1 (pagina 128). 1. g) Nu este derivabilă în $x = 0$, $f'(0) = +\infty$; h) Nu este derivabilă în $x = 0$, $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = 1$. **2.** c) Nu este derivabilă în $x = 0$. **3.** $f(x) - f(0) = x \sin\frac{1}{x} \to 0$, cînd $x \to 0$. Dar $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin\frac{1}{x}$ nu are limită pentru $x \to 0$. **4.** $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ și $\alpha - 1 > 0$ implică $x^{\alpha-1} \to 0$ pentru $x \to 0$, deci $f'(0) = 0$. **5.** Nu, căci $f'(0) = \infty$. **8.** $a = -1, b = 1$. **9.** $f'_s(-1) = -\infty, f'_d(-1) = \infty, f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, $f'_s(+1) = -\infty, f'_d(+1) = +\infty$. **12.** a) $x = 2$ punct de întoarcere; b) $x = 1$ punct de întoarcere; c) $x = 1$ punct unghiular; d) $x = 0$ și $x = 1$ puncte unghiulare. **13.** f derivabilă în $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Punctele cerute sînt $x \in (-\infty, 0) \cup \{\sqrt{2}\}$. **14.** Tangenta în $x_0 = \pm 1$; $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

IV. § 2 (pagina 143). 1. a) $f'(x) = 3x^2 - 1$, $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}$; b) $f'(x) = 100\,x^{99} + 2x^{43}$, $F = E = \mathbf{R}$; c) $f'(x) = \cos x - \sin x$, $F = E = \mathbf{R}$; h) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $E = [0, \infty)$,

$F=(0,\infty)$; o) $f'(x)=\dfrac{1-x\cdot}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$; $E=[0,\infty)$, $F=(0,\infty)$. **2.** d) $x=-1$; e) $x=\dfrac{1}{e}$, f) $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$; g) $x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$; h) $x=0$. **3.** a) 0; b) $\dfrac{7}{2}$. **5.** $(f+g)(x)=2x$ și $(fg)(x)=x^2-|x|^3=0$, deci $f+g$, fg sînt derivabile pe $\mathbb{R}$. Nederivabilitatea funcțiilor f și g în $x=0$ se datorează prezenței lui $|x|$. **6.** $\dfrac{x\sqrt{x}-0}{x}=\sqrt{x}\to 0$ pentru $x\to 0$, deci $f'(0)=0$. **7.** $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ nu are limită cînd $x\to 0$, căci $2x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$, iar $\cos\dfrac{1}{x}$ nu are limită; apoi $f'(0)=0$. **8.** a) $y-1=2(x-1)$; d) $y-0=1(x-1)$; f) $y-\sin\dfrac{\pi}{4}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)$ etc. **13.** $(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{4}$. **14.** a) Notăm $df(x_0)=\varphi$, deci $\varphi(x)=f'(x_0)\cdot x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. În primul caz $\varphi(x)=7x$, apoi $\varphi(x)=2x$ etc.; b) $df=f'(x)dx$, deci $df=(3x^2-1)dx$ etc. **15.** c) $a=1$, $a=-3$; $a=-2$. **16.** b) $f'(x)=0$ pentru $x=\dfrac{1}{e}$, f'' nu se anulează; c) f' nu se anulează, $f''(x)=0$ pentru $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) $f'(x)=0$ pentru $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$, f' nu se anulează; i) $f'(x)=0$ pentru $x=\dfrac{1}{4}$, f'' nu se anulează; l) f' nu se anulează, $f''(x)=0$ pentru $x=0$. **17.** a) $f^{(n)}(x)=0$ pentru $n\geqslant 4$; b) $f^{(n)}(x)=n!$; c) $f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$; d) $f'(x)=\cos x=$ $=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$, $f''(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin(\pi+x)$, $f'''(x)=\cos(\pi+x)=\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$ și prin inducție $f^{(n)}(x)=\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+x\right)$ etc. **18.** a) $f'(x)=-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(x-a_i)^2}$ $(x\in E)$, deci $f'(x)<0$; b) Din $P(x)=(x-a_1)\dots(x-a_n)$ rezultă $P'(x)=(x-a_2)\dots(x-a_n)+$ $+(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)+\dots+(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})$ de unde rezultatul etc.

19. Demonstrația se face prin inducție; pentru $n=1$ relația este verificată. Dacă ea este verificată pentru n, să arătăm că este verificată pentru $n+1$. Avem $(fg)^{(n+1)}(x)=((fg)^{(n)})'=$ $=\left(\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)'=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(f^{(n-k)}g^{(k)})'(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k(f^{(n+1-k)}g^{(k)}+f^{(n-k)}g^{(k+1)})(x)=$ $=\sum\limits_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(f^{(n+1-k)}g^{(k)})(x)$. În ultima egalitate am folosit faptul că $C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$.

IV. § 3 (pagina 150). **1.** $v(t)=s'(t)=2t-2$, $v(1)=0$; $a(t)=s''(t)=2$, $a(1)=2$; mișcarea este uniform accelerată; pentru $t<1$ viteza este negativă, se anulează pentru $t=1$ și apoi devine pozitivă. Dar $s(0)=1$, $s(1)=0$. Interpretarea mecanică este: mobilul se deplasează într-un sens al axei pentru $0<t<1$, iar apoi în sensul opus, mișcarea fiind uniform accelerată. **2.** $k=-1$, $v(t)=s'(t)$, $a(t)=s''(t)$, etc. **3.** $v(t)=s'(t)=3t^2-24t$, deci v este minim pentru $t=4$ și $v_{\min}=v(4)=-48$. Apoi $a(t)=6t-24$. **4.** $\dfrac{dm}{dv}=\dfrac{m_0}{c}\cdot\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$. **5.** $i(t)=-2\pi\sin\pi t$; maximul este

atins în punctele unde $\sin \pi t = -1$ și minimul în $\sin \pi t = 1$. **7.** b) $f(x) \simeq x$, deci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$; c) Aproximarea liniară a funcției $f(x) = \sqrt{3+x} - 2$ în vecinătatea lui $x_0 = 1$ este $\dfrac{x-1}{4}$, deci $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{x-1}{4}}{x-1} = \dfrac{1}{4}$. **8.** Dacă $f(x) = \sqrt{x}$, atunci $f(x) \simeq f(4) + f'(4)(x-4)$ și deci $\sqrt{4{,}17} \simeq f(4) + \dfrac{1}{4}(4{,}17-4)$, deci $\sqrt{4{,}17} \simeq 2{,}042$; luînd $f(x) = \sqrt[3]{x}$ avem $\sqrt[3]{29} \simeq 3{,}074$; luînd $f(x) = \ln x$, găsim $\ln 1{,}11 \simeq 0{,}11$; găsim, în mod analog, $\sin 33° \simeq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\pi}{60} \simeq 0{,}5452$, $\cos 56° \simeq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\pi}{45} \simeq 0{,}560$.

IV. § 4 (pagina 159). 3. Avem $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} f(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$, punînd $\lambda = \dfrac{1}{x}$; apoi avem $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}} f'(\lambda) = 0$, iar $f'(\lambda) = 0$ este echivalent cu $e^{\frac{1}{\lambda}} - 5\lambda e^{\frac{1}{\lambda}} + 5\lambda = 0$ sau, cu substituția $x = \dfrac{1}{\lambda}$, $e^x - 5e^x \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x} = 0$, adică $(5-x)e^x - 5 = 0$. Dar funcția $g(x) = (5-x)e^x - 5$ are proprietatea lui Darboux și cum $g(4) = e^4 - 5 > 0$, $g(5) = -5 < 0$, rezultă că există $x_0 \in (4, 5)$ cu $g(x_0) = 0$, $\lambda_0 = \dfrac{1}{x_0}$ va fi singurul punct critic cu $\dfrac{1}{5} < \lambda_0 < \dfrac{1}{4}$. **4.** Funcția $x \longmapsto |3x-2| - 5$ nu este derivabilă în $x = \dfrac{2}{3} \in \left[-1, \dfrac{7}{3}\right]$, deci nu sînt îndeplinite condițiile teoremei lui Rolle. **5.** a) f' este un polinom de gradul 2, conform teoremei lui Rolle, f' are o rădăcină în intervalul $(1, 2)$ și alta în $(2, 3)$; analog pentru g'; b) Dacă între două rădăcini consecutive x', x'' ale lui P' ar exista două rădăcini ale lui P, atunci, aplicînd teorema lui Rolle, între aceste rădăcini ar exista o rădăcină x''' a lui P', ceea ce contrazice faptul că rădăcinile x' și x'' ar fi consecutive. **6.** Aplicînd teorema lui Rolle funcției f, rezultă că pe intervalul (a_i, a_{i+1}) există cel puțin o rădăcină c_i a lui f'. Dacă f este un polinom de gradul n, și dacă ar avea mai mult de n rădăcini reale, atunci, aplicînd succesiv rezultatul precedent lui $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$, ar rezulta că $f^{(n)}$ ar avea cel puțin o rădăcină, ceea ce este absurd, căci f este o constantă. **7.** Nu se contravine teoremei lui Rolle căci funcția f nu este definită în $0 \in [-1, 1]$. **8.** Raționament analog cu cel de la problema 6.

9. $c = \dfrac{1}{\ln 2}$. **11.** $c = e - 1$ pentru primul caz, $c = \dfrac{\pi}{4}$ în al doilea caz.

CAPITOLUL V

V. § 1 (pagina 173). 1. a) Pe intervalele $(-8, -4]$, $[0, \infty)$ f este crescătoare ($f' \geqslant 0$) și pe $[-4, 0]$ este descrescătoare ($f' \leqslant 0$); m) pe $(0, 1]$ este descrescătoare și pe $(1, \infty)$ este crescătoare. **3.** Dacă ar exista F_1, F_2 derivabile pe (a, b) astfel ca $F_1(x) = F_2(x) = f(x)$ și $F_1(x_0) = F_2(x_0) = \alpha$, atunci $F_1' = F_2' = 0$ pe (a, b), deci $F_1 - F_2$ ar fi o constantă, anume constanta nulă. **5.** a) 1; b) $\frac{1}{10}$; c) 4; d) $\frac{1}{2}$; e) 1; f) $\frac{4}{3}$; g) 0; h) $\frac{2}{\pi}$; i) $\frac{2}{3}$; j) $\frac{1}{2}$; k) 2; l) $\frac{1}{e}$; m) $\frac{1}{e}$; n) 1; o) 0; p) e^6; q) ∞; r) 1; s) 1; t) 1; **7.** Aplicarea regulii lui l'Hospital conduce la cîtul $\frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$ care nu are limită pentru $x \to \infty$, dar $\frac{x - \sin x}{x + \cos x} = \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} \to 1$ pentru $x \to \infty$.

V. § 2 (pagina 180). 1. a) Pe $(-\infty, -1)$ f este concavă și pe $(-1, \infty)$ convexă; d) Pe $(-\infty, 0)$ funcția este convexă și pe $(0, \infty)$ concavă; h) Pe $(-\infty, 0)$ f este concavă și pe $(0, \infty)$ convexă. **2.** Se pune mai întîi condiția necesară $f''(x) = 0$, apoi se discută semnul lui f'' în jurul punctelor găsite. **3.** $f'' > 0$ pe (a, b) implică f' crescătoare pe (a, b). Ecuația tangentei la grafic în punctul $(\alpha, f(\alpha))$ este $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$, adică $y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)$. Aplicînd teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul (α, x), $x > \alpha$, obținem $f(x) = f(\alpha) + f'(c)(x - \alpha)$, cu $\alpha < c < x$ și cum $f'(c) > f'(\alpha)$, rezultă $f(x) > y$. Raționament analog pentru cazul $x < \alpha$. **4.** Direct din definiția V.1 pentru $t = \frac{1}{2}$. **6.** a) $f(x) = 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{2}$; b) $f(x) = 1 - \frac{x^3}{6}$; c) $f(x) = \frac{k}{6}(x - 1)^3$.

V. § 5 (pagina 208). 7. a) Dacă n este par, atunci $n - 1$ este impar și ecuația $nx^{n+1} + p = 0$ are o singură rădăcină reală; șirul lui Rolle va avea doar trei termeni, deci pot apărea cel mult două schimbări de semn. Raționament analog pentru cazul n impar. **9.** Dacă $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ definită pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $f'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} > 0$, deci $f_{max} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, deci $f(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$. **11.** a) Remarcăm mai întîi că pentru $0 < x < 1$, $x^1 \leqslant x$ și cum avem $e^x > x$ rezultă inegalitatea cerută în acest caz. Este suficient de arătat că $e^x \geqslant x^e$ pentru $x > 1$. Inegalitatea cerută se mai poate scrie $e^x \geqslant e^{e \ln x}$ $(x > 1)$ și din monotonia funcției e^t rezultă că ultima inegalitate este echivalentă cu $x \geqslant e \ln x$, adică $\frac{x}{\ln x} \geqslant e$, pentru $x > 1$. Funcția $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ are un singur punct de minim pentru $x = e$, deci $f(x) \geqslant f_{min} = f(e) = e$; b) notînd $\frac{1}{x} = t$, $t > 1$ pentru $x \in (0, 1)$, inegalitatea de demonstrat devine: $\ln t \leqslant \frac{t^\alpha}{\alpha e}$ pentru $t > 1$. Dacă $f(t) = \frac{t^\alpha}{\alpha e} - \ln t$, $f'(t) = \frac{t^\alpha - e}{et}$ se anulează în $t = e^{\frac{1}{e}}$ și f are un minim în acel punct, deci $f(t) > f_{min} = \frac{(e^{\frac{1}{e}})^\alpha}{\alpha e} - \ln(e^{\frac{1}{e}}) = 0$; c) fie $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + \ln(1 + x)$. Derivata funcției $F = f - g$ este $e^x - \frac{1}{1 + x}$ și

se anulează doar în $x=0$. În $x=0$ F are un minim și $F(0)=f(0)-g(0)=0$, deci $F(x)\geqslant 0$ pentru $x\in(-1,\infty)$, adică inegalitatea cerută (egalitatea avînd loc doar pentru $x=0$).

PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Presupunem, prin absurd, că ar exista o funcție polinomială reală P de gradul $n\geqslant 0$ astfel încît $|x|=P(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Atunci $x^2=P^2(x)$ și ar rezulta $n=1$, deci ar exista a, $b\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$ astfel încît $|x|=ax+b$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Pentru $x=0$ se obține $b=0$ și pentru $x=1$, $a=1$; ar rezulta $|x|=x$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, contradicție. **2.** $|a_n-b_n|=\dfrac{2n}{2n+1}<1$ pentru orice $n\geqslant 1$; apoi $|a_n+b_n-2|=\dfrac{2}{2n+1}$ și condiția din enunț are loc pentru $n>100$. **3.** Dacă $0<m<n$ sînt întregi, atunci $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2m}{2n}>\dfrac{2m-1}{2n}>0$, $\dfrac{m}{n}=\dfrac{2m}{2n}<\dfrac{2m+1}{2n}<1$ și, ca atare, în mulțimea A nu există min A, max A. Arătăm apoi că $\inf A=0$, $\sup A=1$. Pentru orice $\varepsilon>0$ și pentru orice m natural există un întreg $n>m$ astfel încît $n>\dfrac{m}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{m}{n}<\varepsilon$. Așadar $\inf A=0$. Apoi pentru orice $\varepsilon>0$ și pentru orice k natural există m natural astfel încît $m>\dfrac{k(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$, deci $\dfrac{m}{k+m}>1-\varepsilon$ și notînd $n=k+m$ avem $1>\dfrac{m}{n}>1-\varepsilon$, deci $\sup A=1$. **4.** $\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } x<0\\ 0, & \text{dacă } x\geqslant 0\end{cases}$ etc. **5.** Fie $m_1=\inf\limits_{x\in[0,1]}x^n$, n fiind fixat și fie m, M marginile lui f pe $[0,1]$. Luăm $Q(x)=x^n+A$, cu A ales astfel încît $M\leqslant m_1+A$. Atunci $f(x)\leqslant M\leqslant m_1+A\leqslant x^n+A=Q(x)$ pentru orice $x\in[0,1]$ etc. Intervalul $[0,1]$ poate fi înlocuit cu $[a,b]$. **7.** Divergent; convergent. **10.** Suma lungimilor segmentelor $AC_1+C_1A_1+A_1C_2+\ldots+A_{n-1}C_n+C_nB$ este egală cu $2n\cdot\dfrac{a}{n}=2a$ și limita respectivă este $2a$ (deși linia poligonală „converge" în poziție către segmentul AB de lungime a). Noțiunea de „convergență" folosită aici diferă de cea din cazul șirurilor de numere reale. **14.** Dacă $x_n\to a$, atunci există N natural astfel încît $\forall m,n\geqslant N$, să avem $|x_m-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, de unde $|x_m-x_n|<\varepsilon$. **15.** a) Discontinuă pe $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, continuă în $x=0$; b) este continuă pe $\mathbf{R}$; f) dacă $x\in\mathbf{Z}$, atunci $\sin\pi x=0$ și în vecinătatea unui astfel de punct $\sin x\pi$ ia atît valori pozitive cît și negative, deci $f(x)$ va lua valorile $+1$ și -1 oricît de aproape de x, deci f nu poate fi continuă. În celelalte puncte, f este local constantă, deci continuă, căci $\sin\pi x$ are semn constant. **17.** a) Din condiția $f(0)=f(2\pi)$ rezultă că putem prelungi funcția f la o funcție periodică pe $\mathbf{R}$, de perioadă 2π, care va fi continuă și pe care o notăm, de asemenea, cu f. Fie $g(x)=f(x+\pi)-f(x)$; $g(x+\pi)=f(x+2\pi)-f(x+\pi)=f(x)-f(x+\pi)=-g(x)$, deci pe orice interval $[x,x+\pi]$, g (care este continuă), se va anula, adică există $c\in[0,\pi]$ pentru care $f(c+\pi)-f(c)=0$; b) fie $g(x)=f(x)-x$ și $h(x)=f(x)+x$; este ușor de văzut că $g(a)\cdot g(-a)\leqslant 0$ și $h(a)\cdot h(-a)\leqslant 0$, de unde, aplicînd teorema valorilor intermediare, aplicabilă deoarece g și h sînt continue, rezultă concluzia dorită. **18.** Distingem două cazuri. Dacă $f(1)<80$, atunci considerăm funcția $g(t)=f(t+1)-f(t)$; $g(0)=f(1)$, $g(1)=f(2)-f(1)=160-f(1)>80$, deci g (care este continuă) va lua, cînd t parcurge intervalul $(1,2)$, toate valorile cuprinse între $f(1)$ și $160-f(1)$, deci la un moment t_0, $g(t_0)=80$. Dacă $f(1)>80$, considerăm funcția $h(t)=f(t)-f(t-1)$ definită pe $(1,2)$ și raționăm analog. **21.** $\alpha=2e$, $\beta=-e$. Dreapta $y=\alpha x+\beta$ este atunci tangentă în $x=1$ la curba $y=xe^x$. **22.** Se pot da numeroase exemple. Un exemplu simplu este

următorul: $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$. **25.** a) $m \leqslant -1$. **26.** Pe $(0, e^2]$ funcția este crescătoare, și $f(3) < f(5)$, deci $a \leqslant b$. **28.** Prima relație rezultă aplicînd teorema lui Lagrange funcției f pe intervalul $(a - h, a + h)$, a doua rezultă aplicînd de două ori teorema lui Lagrange funcției $g(x) = f(a + h) - f(x)$, definită pe $[a - h, a]$.

NOTĂ. Indicăm numele autorilor de drept ai unora dintre exercițiile și problemele din acest manual, adresîndu-le totodată mulțumirile noastre: N. Boboc, Gr. Arsene, Gh. Sireţchi, M. Rădulescu, S. Rădulescu, L. Panaitopol, M.E. Panaitopol, C. Ottescu, C. Niculescu, D.M. Bătineţu, D. Bușneag, A. Ghioca, P. Dragoș. Sîntem recunoscători Gazetei matematice și tuturor profesorilor care ne-au transmis observațiile lor.

TABLA DE MATERII

CAPITOLUL I. **NUMERE REALE. FUNCŢII REALE** 3
Introducere 3
§ 1. Numere reale 4
Exerciţii 12
§ 2. Funcţii reale. Operaţii cu funcţii reale 15
Exerciţii 20
§ 3. Noţiunea de şir 22
§ 4. Submulţimi ale lui R 24
Exerciţii 27
§ 5. Cîteva clase de funcţii reale .. 29
Exerciţii 35
Exerciţii şi probleme rezolvate la capitolul I 37
CAPITOLUL II. **LIMITE DE ŞIRURI. LIMITE DE FUNCŢII** 40
§ 1. Şiruri convergente de numere reale 40
Exerciţii 48
§ 2. Limita unei funcţii într-un punct 50
Exerciţii 57
§ 3. Operaţii cu şiruri convergente 58
Exerciţii 63
§ 4. Calculul limitelor de şiruri.... 64
Exerciţii 73
§ 5. Operaţii cu limite de funcţii .. 74
Exerciţii 76
§ 6. Asimptotele funcţiilor reale .. 77
Exerciţii 80
§ 7. Calculul limitelor de funcţii.. 81
Exerciţii 92
Exerciţii şi probleme rezolvate la capitolul II 94
CAPITOLUL III. **FUNCŢII CONTINUE** 100
§ 1. Funcţii continue într-un punct; funcţii continue pe o mulţime 100
Exerciţii 107
§ 2. Proprietăţi ale funcţiilor continue pe un interval 109
Exerciţii 115
Exerciţii şi probleme rezolvate la capitolul III 116
CAPITOLUL IV. **FUNCŢII DERIVABILE** 120
§ 1. Derivata unei funcţii într-un punct 120
Exerciţii 128
§ 2. Operaţii cu funcţii derivabile. Derivatele unor funcţii uzuale 129
Exerciţii 143
§ 3. Aplicaţii directe ale derivatelor 147
Exerciţii 150
§ 4. Proprietăţile funcţiilor derivabile 151
Exerciţii 159
Exerciţii şi probleme rezolvate la capitolul IV 160
CAPITOLUL V. **APLICAŢII ALE DERIVATELOR ÎN STUDIUL VARIAŢIEI FUNCŢIILOR** 166
§ 1. Rolul primei derivate în studiul funcţiilor 166
Exerciţii 173
§ 2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor 175
Exerciţii 180
§ 3. Reprezentarea grafică a funcţiilor 181
Exerciţii 196
§ 4. Probleme de maxim şi minim; optimizări 198
Exerciţii 202
§ 5. Aplicaţii ale analizei matematice la studiul ecuaţiilor 203
Exerciţii 208
§ 6. Aplicaţii ale analizei matematice în cinematică 209
Exerciţii 213
Exerciţii şi probleme rezolvate la capitolul V 213
PROBLEME RECAPITULATIVE 216
Notă istorică 221
RĂSPUNSURI ŞI INDICAŢII 224

Plan editură : 35 109
Coli de tipar : 15
Bun de tipar : 17.02.1989

Com. nr. 90 017
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.